

Κυρτότητα συναρτήσεων

Ορισμοί

A. Σύμφωνα με την ισχύουσα διδακτέα ύλη

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

B. Σχολικό εγχειρίδιο του 1976 (B. Σταϊκού)

Έστω συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ .

- Λέμε ότι η f είναι **κυρτή** στο Δ , αν και μόνο αν $f(x) - f(y) - f'(x)(x-y) \geq 0$, για κάθε $x, y \in \Delta$.
- Λέμε ότι η f είναι **κοίλη** στο Δ , αν και μόνο αν $f(x) - f(y) - f'(x)(x-y) \leq 0$, για κάθε $x, y \in \Delta$.

Γ. Σχολικό εγχειρίδιο Γ' τάξης Ανάλυση 1992

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

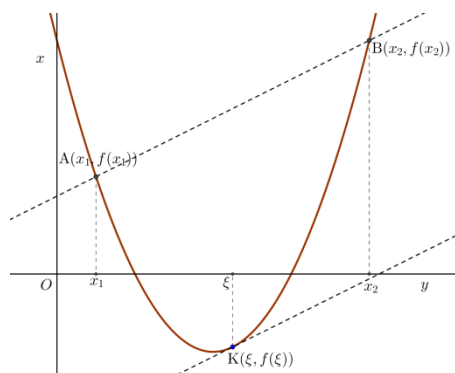
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Δ. Σχολικό εγχειρίδιο Γ' τάξης Λυκείων Κύπρου

Έστω συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο διάστημα Δ .

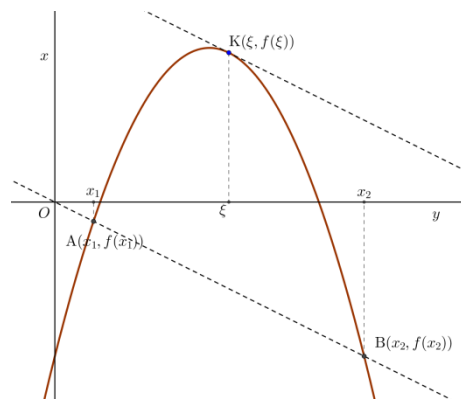
Αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, και $y = y(x)$ η ευθεία AB με $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ (χορδή της C_f).

- Λέμε ότι η f είναι **κυρτή** στο Δ , όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $f(\xi) \leq y(\xi)$ για κάθε $\xi \in [x_1, x_2]$.



Σχήμα 1

- Λέμε ότι η f είναι **κοίλη** στο Δ , όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει :
 $f(\xi) \geq y(\xi)$ για κάθε $\xi \in [x_1, x_2]$.



Σχήμα 2

Σχόλια

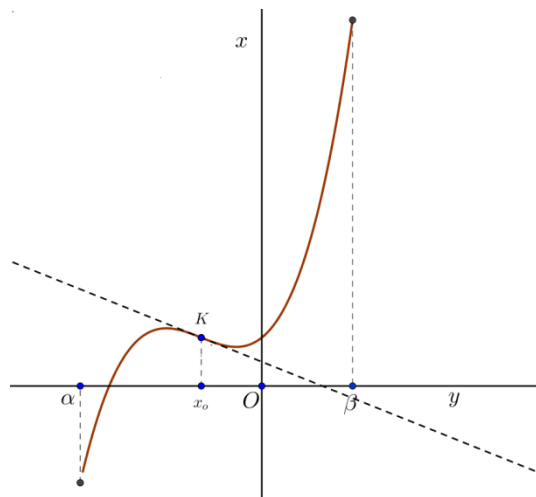
1. Στους ορισμούς A, B και Γ η συνάρτηση απαιτείται να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ .
 Στοιχείο που δεν είναι απαραίτητο στον ορισμό Δ .
 Δηλ. οι συναρτήσεις $f(x) = 2-|x-1|$ και οι $g(x)=-f(x)$ είναι αντίστοιχα κυρτή και κοίλη σύμφωνα με τον ορισμό Δ αλλά δεν μπορεί να ελεγχθεί η κυρτότητα με τον ορισμό A.¹
2. Όταν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε την μονοτονία της f' και επομένως τα κοίλα, τα προσδιορίζουμε με το πρόσημο της f'' .

Σημείο καμπής

Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ (Δ διάστημα) μια παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Το σημείο $K(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in \Delta$, στο οποίο

- υπάρχει εφαπτομένη
 - αλλάζει η κυρτότητα της f
- ονομάζεται **σημείο καμπής** της C_f .



Σχήμα 3

Κριτήριο

Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη.

Αν σε σημείο $K(x_0, f(x_0)) \in C_f$ υπάρχει εφαπτομένη και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο

¹ Επισημαίνεται ότι η διδακτέα ύλη από το 1999 και μετά στα Ελλαδικά Λύκεια ο έλεγχος της κυρτότητας περιορίζεται σε συναρτήσεις που είναι 2 φορές τουλάχιστον παραγωγίσιμες στο εσωτερικό των διαστημάτων.

εκατέρωθέν του τότε το K είναι σημείο καμπής της f .

Σχόλια

1. Στα σημεία καμπής η εφαπτόμενη «διαπερνά» την γραφ. παράσταση, δεδομένου ότι, με την αλλαγή κυρτότητας της f , αυτή αλλάζει θέση εκατέρωθεν τους. (σχήμα 3)
2. Σημεία καμπής έχουμε σε σημεία της f στα οποία υπάρχει εφαπτόμενη και είναι κρίσιμα σημεία της f'' (αν υπάρχει).
3. Τα σημεία καμπής είναι θέσεις ακροτάτων της f' .
4. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στα σημεία καμπής έχουμε μηδενισμό της $2^{\text{ης}}$ παραγώγου της.
5. Στις συναρτήσεις της μορφής $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$, το σημείο καμπής είναι στην θέση $x_0 = -\frac{b}{3a}$ και όταν αυτή έχει τοπικά ακρότατα είναι το μέσον του ευθ. τμήματος των ακροτάτων.

Προτάσεις

1. Πρόταση I.

Έστω $f:\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν είναι κυρτή (κοίλη) τότε η γραφική παράσταση C_f κάθε κυρτής (κοίλης) βρίσκεται πάντα πάνω (κάτω) από οποιαδήποτε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι η C_f μια παραγωγίσιμη και κυρτής συνάρτησης η C_f είναι πάνω από κάθε εφαπτόμενη.

Έστω $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ μια εφαπτόμενη της C_f .

Τότε για κάθε $x \in \Delta$ και $x < x_0$ στο $[x, x_0]$, και το θεώρημα της μέσης τιμής για την

f , υπάρχει $x_1 \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και αφού f κυρτή είναι

f' γν. αύξουσα οπότε

$$f'(x_1) < f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) \stackrel{x-x_0 < 0}{\Leftrightarrow} f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = y.$$

Αν $x \in \Delta$ και $x > x_0$ τότε όμοια, υπάρχει $x_1 \in (x_0, x)$ έτσι ώστε

$$f'(x_0) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x-x_0 > 0}{\Leftrightarrow} f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = y.$$

Άρα για κάθε $x \in \Delta$ η C_f είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο $\Delta - \{x_0\}$.

Για την κοίλη αποδεικνύεται όμοια ότι η C_f βρίσκεται πάντα κάτω από κάθε εφαπτόμενη.

2. Πρόταση II

Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν είναι κυρτή (κοίλη) τότε η γραφική παράσταση C_f κάθε κυρτής (κοίλης) βρίσκεται πάντα κάτω (πάνω) από την ευθεία οποιασδήποτε χορδής της (εκτός από τα άκρα της χορδής).

Απόδειξη

Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

Αν είναι κυρτή τότε f' γν. αύξουσα.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ με $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$

Θα αποδείξουμε ότι η C_f είναι κάτω από την οποιαδήποτε χορδή της AB .

Η χορδή AB έχει εξίσωση

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1)$$

Έστω $x_0 \in (x_1, x_2)$. Το (x_0, y_0) είναι τυχαίο σημείο της χορδής AB .

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, x_2)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

αφού η f είναι κυρτή.

Οπότε αφού $(x_0 - x_1)(x_2 - x_0) > 0$ έχουμε διαδοχικά

$$(x_2 - x_0)f(x_0) - (x_2 - x_0)f(x_1) < (x_0 - x_1)f(x_2) - (x_0 - x_1)f(x_0)$$

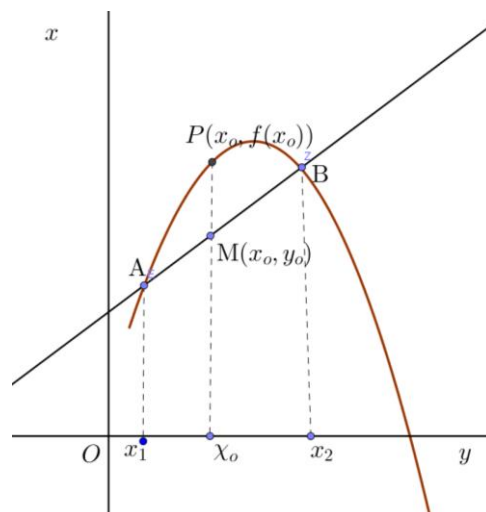
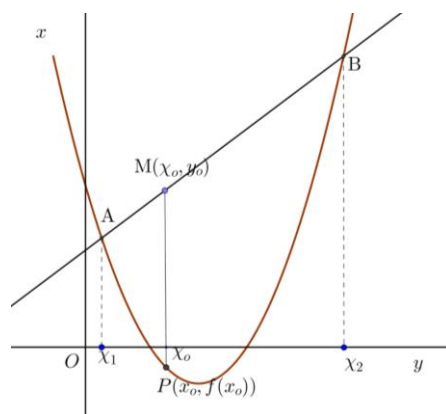
$$f(x_0)(x_2 - x_1) < x_2 f(x_1) - x_0 f(x_1) + x_0$$

$$f(x_2) - x_1 f(x_2) + x_0 f(x_0) - x_0 f(x_0)$$

και τελικά

$$f(x_0) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x_0 - x_1) + f(x_1) = y_0$$

Άρα για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Δηλ. η C_f είναι κάτω από την AB δηλ. κάτω από κάθε χορδή της.



Όμοια αν η f είναι κοίλη .

$$f(x_0) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x_0 - x_1) + f(x_1) = y_0$$

3. Χρήσιμες ανισότητες

A. Αν $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και

α_1 . **κυρτή** τότε, $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$ με $x_0 \in \Delta$

α_2 . **κοίλη** τότε, $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$ με $x_0 \in \Delta$

Προκύπτουν από την πρόταση I. (το 2^ο μέλος είναι η εφαπτόμενη της C_f στο $x=x_0$)

B. Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ και

β_1 . **κυρτή** τότε για $\alpha, \beta, x \in \Delta$ με $\alpha < x < \beta$ είναι $f(x) \leq \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} f(\beta)$.

β_2 . **κοίλη** τότε για $\alpha, \beta, x \in \Delta$ με $\alpha < x < \beta$ είναι $f(x) \geq \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} f(\beta)$.

Απόδειξη

β_1 Η f σαν κυρτή είναι πάντα κάτω από την χορδή AB με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$. (Πρόταση II). Άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, ισχύει

$$f(x) \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} (x - \alpha) + f(\alpha) = \frac{x f(\beta) - x f(\alpha) - \alpha f(\beta) + \alpha f(\alpha) + \beta f(\alpha) - \alpha f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} f(\beta).$$

Όμοια αν η f είναι κοίλη.

Γ. Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ και

β_1 . **κυρτή** τότε υπάρχουν $\kappa, \lambda \geq 0$ με $\kappa + \lambda = 1$ για τα οποία ισχύει

$$f(\kappa\alpha + \lambda\beta) \leq \kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta), \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta.$$

β_2 . **κοίλη** τότε υπάρχουν $\kappa, \lambda \geq 0$ με $\kappa + \lambda = 1$ για τα οποία ισχύει

$$f(\kappa\alpha + \lambda\beta) \geq \kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta), \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta.$$

Απόδειξη

β_1 Η f σαν κυρτή είναι πάντα κάτω από την χορδή AB με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$. Άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, ισχύει

$$f(x) \leq \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} f(\beta). \quad (I)$$

Θέτοντας $\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} = \lambda > 0 \Leftrightarrow x - \alpha = \lambda\beta - \lambda\alpha \Leftrightarrow x = (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$ και τελικά $x = \kappa\alpha + \lambda\beta$ (με

$$\kappa = 1 - \lambda) \text{ έχουμε } \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \kappa\alpha - \lambda\beta}{\beta - \alpha} = \frac{\kappa\beta - \kappa\alpha}{\beta - \alpha} = \kappa > 0. \text{ Οπότε η (I) γίνεται}$$

$$f(\kappa\alpha+\lambda\beta)\leq\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta).$$

β_2 Ομοίως αν η f είναι κοίλη.

Ειδική περίπτωση αν $\kappa=\lambda=\frac{1}{2}$ έχουμε $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\leq\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ όταν f κυρτή

και $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\geq\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$, όταν f κοίλη. (Οι ανισότητες αυτές

αποδεικνύονται με τον ορισμό της κυρτότητας και το θεώρημα της μέσης

τιμής στα $[a, \frac{\alpha+\beta}{2}]$, $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ για τη f . (Η απόδειξη αφήνεται σαν

άσκηση).

4. Έστω $f:\Delta\rightarrow\mathbb{R}$ και κυρτή τότε για κάθε $x, y,$

$z\in\Delta$ με $x<z<y$, ισχύει

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

δηλ. $\lambda_{\vec{AM}}\leq\lambda_{\vec{AB}}\leq\lambda_{\vec{BM}}$.

(Είναι γνωστή σαν πρόταση των τριών χορδών.)

Απόδειξη

Από την [ανισότητα 2](#) έχουμε

$$f(z)\leq\frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)\Rightarrow f(z)-f(x)\leq\left(\frac{y-z}{y-x}-1\right)f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)\Rightarrow$$

$$f(z)-f(x)\leq\frac{y-z-y+x}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)\Rightarrow f(z)-f(x)\leq\frac{x-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)\Rightarrow$$

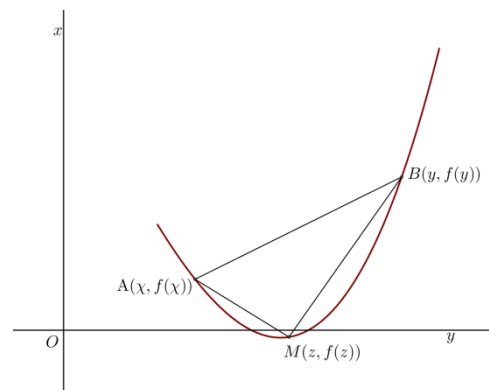
$$f(z)-f(x)\leq\frac{z-x}{y-x}[f(y)-f(x)]\Rightarrow\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\text{ (I) (αφού }z>x\text{).}$$

$$\text{Επίσης } f(z)\leq\frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)\Rightarrow f(z)-f(y)\leq\frac{y-z}{y-x}f(x)+\left(\frac{z-x}{y-x}-1\right)f(y)\Rightarrow$$

$$f(z)-f(y)\leq\frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x-y+x}{y-x}f(y)\Rightarrow f(z)-f(y)\leq\frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-y}{y-x}f(y)\Rightarrow$$

$$f(z)-f(y)\leq\frac{z-y}{y-x}[f(y)-f(x)]\Rightarrow\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}\text{ (II) (αφού }z<y\text{)}$$

$$\text{Από I και II έχουμε }\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$



Παραδείγματα

1. α. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2$, για κάθε $x\in\Delta$.

β. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω. (Θέμα εξετάσεων 1992)

Λύση

Για τη g έχουμε $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ και $g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$, για κάθε $x \in \Delta$.

Αν ισχύει ότι είναι κυρτή τότε η g' είναι γν. αύξουσα και επομένως πρέπει $g''(x) \geq 0$,

δηλ. $\frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} \geq 0 \Rightarrow f''(x)f(x) \geq [f'(x)]^2$, για κάθε $x \in \Delta$.

Αν $f''(x)f(x) \geq [f'(x)]^2$, για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε τις περιπτώσεις²

Αν $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η g είναι κυρτή.

Αν $g''(x) = 0$, για μεμονωμένα σημεία, τότε g' γν. αύξουσα και έτσι g κυρτή.

Αν $g''(x) = 0$ σε κάποια υποδιαστήματα του Δ , τότε η $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = a \in \mathbb{R}$ σταθερή

και έτσι η $f'(x) = af(x) \Rightarrow f(x) = ce^{ax} \Rightarrow g(x) = ax + \ln c$ ³, σε αυτά (εννοείται τμήματα από όχι στην ίδια ευθεία κάθε φορά). Οπότε συμπεραίνουμε ότι η C_g αποτελείται από τμήματα της γρ. παράστασης της $y(x) = \ln f(x)$ που «διακόπτεται» από ευθύγραμμα τμήματα της μορφής $y = ax + b$ σε μια συνεχή γραμμή, αφού η g σαν παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Άρα η g είναι κυρτή.

β. Από το α. ερώτημα έχουμε ότι η g είναι κυρτή αν και μόνο αν

$$(x^2+2)''(x^2+2) \geq [(x^2+2)']^2 \Leftrightarrow 2x^2+4 \geq 4x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

2. ⁴Δίνεται πραγματική συνάρτηση g , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii. $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (θέμα εξετάσεων 1996)

Λύση.

i. Η, είναι πηλίκο παραγωγισίμων και έτσι $\left(\frac{g'}{g}(x)\right)' = \frac{g''(x)g(x) - [g'(x)]^2}{[g(x)]^2} > 0$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Επειδή $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ζητούμενη ισοδυναμεί για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με την

$$\ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] \leq \ln\sqrt{g(x_1)g(x_2)} \Leftrightarrow \ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{2} [\ln(g(x_1)) + \ln(g(x_2))] \Leftrightarrow$$

² Δεν θα ήταν απαραίτητες αν ακολουθήσουμε το [ορισμό Γ](#).

³ Κάθε ευθεία $y = \lambda x + b$, με $\lambda \neq 0$ είναι κυρτή αν $\lambda > 0$ και κοίλη αν είναι $\lambda < 0$. Αν $\lambda = 0$ θεωρούμε ότι είναι και κυρτή και κοίλη.

⁴ Η άσκηση αναφέρεται σαν παράδειγμα της [ανισότητας Γ](#) καθώς φαίνεται η σκέψη απόδειξης της ειδικής περίπτωσης. Παρατηρήστε ότι η διατύπωση του θέματος δεν αναφέρεται στην κυρτότητας της h .

$$2\ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] \leq \ln(g(x_1)) + \ln(g(x_2)) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] - \ln(g(x_1)) \leq \ln(g(x_2)) - \ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]. \quad (\mathbf{Z})$$

Θεωρούμε την $h(x) = \ln(g(x))$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h' = \frac{g'}{g}$, η οποία

(από α. ερώτημα) είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι αν $x_1 = x_2$ η (Z) ισχύει με το ίσον.

Αν $x_1 < x_2$ τότε στα $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right], \left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ από το θεώρημα της μέσης τιμής για την

h έχουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια ώστε $x_1 < \xi_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < \xi_2 < x_2$ και

$$h'(\xi_1) = \frac{h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - h(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = \frac{\ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] - \ln(g(x_1))}{\frac{x_2-x_1}{2}} \quad \text{και}$$

$$h'(\xi_2) = \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{\ln(g(x_2)) - \ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]}{\frac{x_2-x_1}{2}}.$$

Αλλά h' γν. αύξουσα οπότε

$$h'(\xi_1) = \frac{\ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] - \ln(g(x_1))}{\frac{x_2-x_1}{2}} < h'(\xi_2) = \frac{\ln(g(x_2)) - \ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]}{\frac{x_2-x_1}{2}} \Rightarrow (\mathbf{Z}) \quad (\text{αφού } x_1 < x_2)$$

ὁ.ἔ.δ

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, που παρουσιάζει σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί την σχέση $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Θέμα εξετάσεων)

Λύση

α. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (αφού f είναι 2 φορές παρ/μη), με

$$g'(x) = f'(x)e^{-2x} - 2e^{-2x}f(x) \quad \text{και}$$

$$g''(x) = f''(x)e^{-2x} - 2f'(x)e^{-2x} + 4e^{-2x}f(x) - 2f'(x)e^{-2x}e^{-2x}[f''(x) - 4(f'(x) - f(x))] > 0 \quad \text{για}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δίνεται $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$). Άρα η g κυρτή.

β. Δίνεται ότι για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f υπάρχει ακρότατο στο x_0 με $f(x_0) = 0$. Άρα από το θεώρ. Fermat ισχύει $f'(x_0) = f(x_0) = 0$.

Αφού g είναι κυρτή έχουμε ότι g' γν. αύξουσα.

Άρα για $x < x_0 \Rightarrow g'(x) < g'(x_0) = f'(x_0)e^{-2x_0} - 2e^{-2x_0}f(x_0) = 0$ και για $x > x_0$

$\Rightarrow g'(x) > g'(x_0) = 0$ δηλ. $g(x) \geq g(x_0) = f(x_0)e^{-2x_0} = 0$ δηλ. $f(x)e^{-2x} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη κυρτή (κοίλη) συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = f(\beta)$.
Να αποδείξετε ότι η f έχει τοπ. ελάχιστο (τοπ. μέγιστο).

Λύση

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη με $f(\alpha) = f(\beta)$, από το θεωρ. Rolle, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Επίσης αφού είναι κυρτή (κοίλη) τότε η f' είναι γν. αύξουσα (γν. φθίνουσα).

Έτσι όταν $\alpha < x < x_0 \Rightarrow f'(\alpha) < f'(x) < f'(x_0) = 0$ ($f'(\alpha) > f'(x) > f'(x_0) = 0$) και όταν $x_0 < x < \beta \Rightarrow 0 = f'(x_0) < f'(x) < f'(\beta)$ ($0 = f'(x_0) > f'(x) > f'(\beta)$).

Επομένως η f παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο (τοπ. μέγιστο) στο $x = x_0$.

5. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η γραφική παράσταση της f ,
με $f(x) = \alpha \sqrt{x} + \frac{\beta}{\sqrt{x}}$, έχει σημείο καμπής το $A(1, 4)$.

Λύση.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \alpha \frac{1}{2\sqrt{x}} - \beta \frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad f''(x) = -\alpha \frac{1}{4x^2\sqrt{x}} + \beta \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Αν έχει σημείο καμπής το } A \text{ τότε } \begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ -\frac{\alpha}{4} + \frac{3\beta}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Για } \alpha = 3 \text{ και } \beta = 1 \text{ είναι } f''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} - \frac{3}{4x\sqrt{x}} = \frac{1-x}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Άρα $f''(x) < 0$ όταν $x > 1$ και $f''(x) > 0$ όταν $x < 1$. Άρα η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$.

Βιβλιογραφία

1. [Σχολικό εγχειρίδιο Γ΄ τάξης Μαθηματικά προσανατολισμού \(σελ.154\)](#)
2. [Σχολικό εγχειρίδιο Γ΄ τάξης τεύχος Α΄ Μαθηματικά κατεύθυνσης Κύπρου \(σελ.60\)](#)
3. [Σχολικό εγχειρίδιο Γ΄ τάξης Μαθηματικά Α΄ Δέσμης \(1992\) \(σελ. 197\)](#)
4. [Σχολικό εγχειρίδιο Ανάλυσης Γ΄ Λυκείου Α΄ Δέσμης \(1983\) \(σελ. 188\)](#)
5. Παράγωγοι συναρτήσεων Θ.Ν. Καζαντζή (1994)(σελ. 344)
6. [Κυρτές συναρτήσεις \(Open eclass\) ΕΚΠΑ.](#)