1ο Γενικό Λύκειο Χανίων ΣΧΟΛ. ΕΤΟΣ 18-19
Τάξη Β΄

Χανιά 28 Μαΐου 2019

Ονοματεπώνυμο...

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τα θέματα ΔΕΝ θα μεταφερθούν στο καθαρό.
Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα
Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό
Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

Α Ι. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$

β. Η εξίσωση κάθε ευθείας, που διέρχεται από το σημείο Α(x_o, ψ_o) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, δίνεται από την σχέση: $x-x_o = \lambda(y-y_o)$

γ. Η απόσταση του σημείου P(x_o, y_o) από την ευθεία ε: $Ax+By+\Gamma=0$ με $(A, B) \neq (0, 0)$ δίνεται από την σχέση $d=\dfrac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

δ. Ο κύκλος (Ο, ρ), όπου Ο η αρχή των αξόνων και ρ>0 έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$.

Μονάδες 4Χ3

ΙΙ. Να απαντήσετε στο γραπτό σας με το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στην πρόταση

«Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο όταν

Α. Α, Β, Γ $\neq 0$, Β. $A^2+B^2-4\Gamma<0$, Γ. $A^2+B^2>2\Gamma$, Δ. $\Gamma<0$

Μονάδες 3

Β. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ όχι παράλληλα στον ψ΄ψ. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1$

Μονάδες 10

Απάντηση

Α Ι **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό

Α ΙΙ Σωστό το Δ.

Β. Θεωρία

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και $|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 1$

α. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \frac{1}{2}$ **Μονάδες 9**

β. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = \lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ να είναι κάθετο στο $\vec{v} = 2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ **Μονάδες 9**

γ. Για λ=2, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{\beta}$ **Μονάδες 7**

Απάντηση

α. Είναι συν$\frac{2\pi}{3}$= , $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = |\vec{\alpha}|\cdot 1\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{|\vec{\alpha}|}{2}$ (1).

έτσι $|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 1 \Leftrightarrow |2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = 1 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2+4\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2 = 1 \overset{|\vec{\beta}|=1 \text{ και } (1)}{\Leftrightarrow}$

$4\vec{\alpha}^2 - 2|\vec{\alpha}|+1=1 \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|\,(2|\vec{\alpha}|-1) = 0 \overset{|\vec{\alpha}|\neq 0}{\Leftrightarrow} 2|\vec{\alpha}| = 1 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = \frac{1}{2}$.

β. $\vec{u} = \lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta} \perp \vec{v} = 2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ σημαίνει $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ δηλ $(\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$

$2\lambda\,\vec{\alpha}^2 - \lambda\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2 = 0 \overset{|\vec{\alpha}|=\frac{1}{2},\, |\vec{\beta}|=1 \text{ και } (1)}{\Leftrightarrow} 2\lambda\cdot(\frac{1}{2})^2 - \lambda(-\frac{1}{4})+2(-\frac{1}{4}) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{2\lambda}{4}+\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{2}$`$+1 \Leftrightarrow 3\lambda = 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 2}$.

γ. Από την σχέση συν$(\widehat{\vec{u},\vec{\beta}}) = \frac{\vec{u}\vec{\beta}}{|\vec{u}||\vec{\beta}|}$ και επειδή

$|\vec{u}| = |2\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 1 = 1 = |\vec{\beta}| = 1$ και

$\vec{u}\vec{\beta} = (2\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\beta} = 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2 = 2(-\frac{1}{4})+1 = \frac{1}{2}$ έχουμε συν$(\widehat{\vec{u},\vec{\beta}}) = \frac{1}{2}$ και

κατά συνέπεια αφού η $(\widehat{\vec{u},\vec{\beta}})$ είναι κυρτή είναι $(\widehat{\vec{u},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία Α(0,7), Β(1, 2) και Γ(6,7).

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των φορέων των υψών ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ και της διαμέσου ΑΜ. **Μονάδες 9**

β. Να βρείτε το ορθόκεντρο Η του ΑΒΓ. **Μονάδες 8**

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓ **Μονάδες 8**

Απάντηση

α. Είναι $\vec{AB}$ = (1–0, 2–7) = (1 –5), $\vec{A\Gamma}$ = (6–0, 7–7) = (6, 0) και το μέσον Μ της ΒΓ είναι το $\left(\frac{1+6}{2}, \frac{2+7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Επειδή ΒΔ⊥ΑΓ και ΑΓ οριζόντια (//$x'x$) το ύψος ΒΔ είναι η κατακόρυφη του Β δηλ. $\boldsymbol{x=1}$.

Επειδή ΓΕ ⊥ ΑΒ και = –5 η ΓΕ θα έχει κλίση λ τέτοια ώστε $\lambda_{\vec{AB}} \cdot \lambda = -1$,

οπότε $\lambda = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}$ και τελικά ΓΕ : $y-7 = \frac{1}{5}(x-6) \Leftrightarrow 5y-35=x-6 \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{x-5y+29=0}$.

Για την ΑΜ είναι $\vec{AM} = \left(\frac{7}{2}-0, \frac{9}{2}-7\right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

Έτσι ΑΜ : $\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}y + k = 0$ και αφού περνά από το Α θα ισχύει

$\frac{5}{2}\cdot 0 + \frac{7}{2}\cdot 7 + k = 0 \Leftrightarrow k=-\frac{49}{2}$ και τελικά η ΑΜ έχει εξίσωση :

$\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}y - \frac{49}{2} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{5x+7y-49=0}$.

β. Το ορθόκεντρο Η του ΑΒΓ είναι η τομή των ΒΔ και ΓΕ έτσι

$\begin{cases} x=1 \\ x-5y+29=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1-5y+29=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 5y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$, δηλ. Η(1,6).

γ. Από την σχέση

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}(0+30) = 15$ τετ. μον.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση x^2–4y^2+4x+4 = 0 (I) και το σημείο Α(1,1).

α. να αποδείξετε ότι η (I) παριστάνει δύο ευθείες ε_1, ε_2. **Μονάδες 9**

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει

d(M, ε_1) = d(Μ, ε_2) **Μονάδες 6**

γ. Να βρείτε εξίσωση κύκλου που εφάπτεται στις ε_1, ε_2 και περνά από το Α.

Μονάδες 10

Απάντηση

α. (1) $\Leftrightarrow (x+2)^2-(2y)^2= 0 \Leftrightarrow (x-2y+2)(x+2y+2) = 0$ οπότε

ε_1 : x–2y+2=0 και **ε_2: x–2y+2=0** , που είναι ευθείες.

β. Έστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο του τόπου. Τότε η σχέση d(M, ε_1) = d(Μ, ε_2)

γίνεται $\dfrac{|x-2y+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \dfrac{|x+2y+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \Leftrightarrow |x-2y+2| = |x+2y+2| \Leftrightarrow$

$x-2y+2 = x+2y+2$ ή $x-2y+2 = -x-2y-2 \Leftrightarrow 4y=0$ ή $2x=-4$, οπότε ο γ.

τόπος των σημείων Μ είναι οι (κάθετες ευθείες) **y= 0** (ο $x'x$) και **η x=–2.**

γ. Έστω Κ(x_o, y_o) και ρ>0 η ακτίνα του κύκλου.

Επειδή ο κύκλος εφάπτεται στις ε_1 και ε_2 το Κ, θα ισαπέχει από αυτές οπότε θα είναι σημείο του γ. τόπου του β. ερωτήματος.

Επομένως $x_o = -2$ ή $y_o = 0$.

Επίσης ρ = (ΚΑ)= d(Κ, ε_1) (2)

Αν Κ(–2, y_o) τότε (2) $\Leftrightarrow \sqrt{(-2-1)^2+(y_o-1)^2} = \dfrac{|-2-2y_o+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{5}\sqrt{9+y_o^2-2y_o+1} = 2|y_o| \Leftrightarrow 5(9+y_o^2-2y_o+1) = 4y_o^2 \Leftrightarrow y_o^2-10y_o+50 = 0$

$\Leftrightarrow (y_o-5)^2+25 = 0$, που είναι αδύνατη. Επομένως το κέντρο δεν βρίσκεται στην x=–2.

Αν Κ(x_o, 0) τότε (2) $\Leftrightarrow \sqrt{(x_o-1)^2+(0-1)^2} = \dfrac{|x_o-2\cdot 0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{5}\sqrt{x_o^2-2x_o+1+1} = |x_o+2| \Leftrightarrow 5(x_o^2-2x_o+1) = x_o^2+4x_o+4 \Leftrightarrow$

$4x_o^2-14x_o+6 = 0 \Leftrightarrow 2x_o^2-7x_o+3 = 0$ και

έτσι $x_o = \dfrac{-(-7)+\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}$ ή $x_o = \dfrac{-(-7)-\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}$

δηλ. $x_o = 3$ ή $x_o = \dfrac{1}{2}$.

Αρα οι ζητούμενοι κύκλοι είναι

C_1: $(x-3)^2+y^2 = 5$ ή C_2: $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{5}{4}$.

Οι εισηγητές

Αθ. Γνεσούλης

Σπ. Κούρτης

Ο Διευθυντής

Ηλίας Πιτσιλαδής