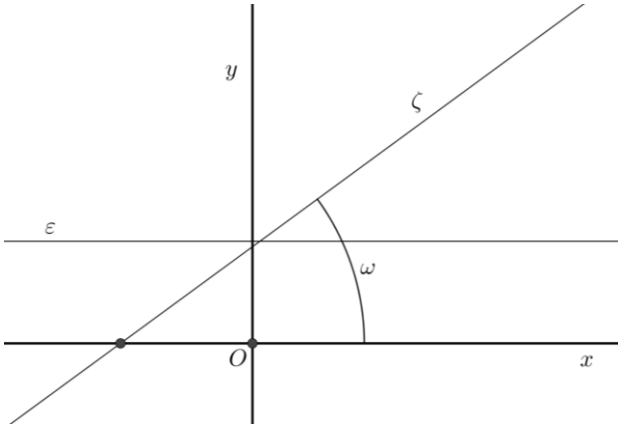
Η ευθεία

Στοιχεία

I. Γωνία ευθείας με *x΄x*

Όταν ευθεία ε είναι παράλληλη στον *x΄x* ή συμπίπτει με αυτόν έχει γωνία **ω = 0**
(στο σχήμα η ευθεία ε και ο άξονας))
Όταν τέμνει τον *x΄x* τότε η γωνία **ω** είναι εκείνη που διαγράφει ο άξονας γύρω από το σημείο τομής κατά την θετική φορά έως ότου συμπέσει με την ευθεία .
(στο σχήμα η ευθεία ζ σχηματίζει γωνία ω)
Ισχύει ό,τι 0≤ ω < π



II. Εύρεση συντελεστή διεύθυνσης ή κλίσης [1] .

	Ευθείας που ορίζεται από :	**συντελεστής διεύθυνσης, ή κλίση λ**
I	ένα σημείο και γνωστή γωνία με $\chi'\chi \neq 90^o$	$\lambda = \varepsilon\varphi\omega$
II	δύο σημεία $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$, $\chi_1 \neq \chi_2$	$\lambda = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\chi_1 - \chi_2}$
III	ένα σημείο και παράλληλη προς ευθεία με κλίση λ_o	$\lambda = \lambda_o$
IV	ένα σημείο και κάθετη προς ευθεία με κλίση $\lambda_o \neq 0$	$\lambda = -\frac{1}{\lambda_o}$
V	ένα σημείο και είναι παράλληλη στο $\vec{\delta} = (\alpha, \beta)$ με $\alpha \neq 0$	$\lambda = \boldsymbol{\lambda}_{\vec{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha}$
VI	ένα σημείο και είναι κάθετη στο $\vec{\delta} = (\alpha, \beta)$ με $\alpha \neq 0$	$\lambda = \boldsymbol{\lambda}_{\vec{\alpha}} = -\frac{\alpha}{\beta}$

Οι ευθείες με γωνία ω = $\frac{\pi}{2}$ (κατακόρυφες) δεν έχουν συντελεστή διεύθυνσης (κλίση)

[1] ***Πρώτα θα ελέγχεται η ύπαρξη κλίσης (ή συντελεστή διεύθυνσης) και μετά θα ορίζεται.***

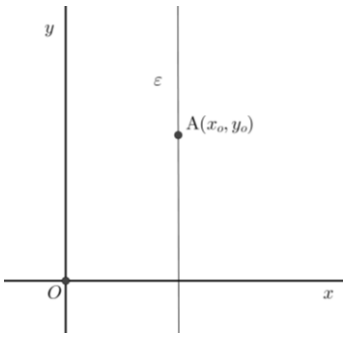
ΙΙΙ.. Εύρεση εξίσωσης ευθείας.

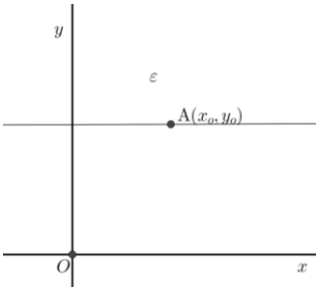
Γενικά μια ευθεία ορίζεται όταν γνωρίζουμε **ένα σημείο της Α(x_o, y_o)** και **την διεύθυνσή της.**

Η διεύθυνση της καθορίζεται:

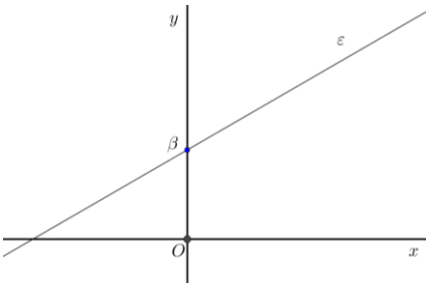
- ► από την γωνία που σχηματίζει με τον χ΄χ,
- ► από την σχέση της με άλλη δεδομένη ευθεία ή διάνυσμα (παραλληλία ή καθετότητα)
- ► από δύο σημεία.

Για τις ευθείες από το Α(x_o, y_o) έχουμε παρακάτω γενικές εξισώσεις:

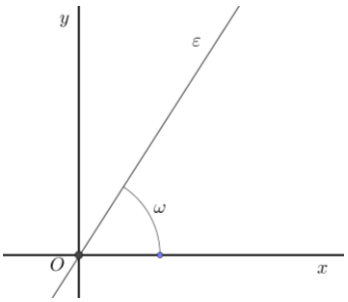
$x = x_o$ όταν διαπιστωθεί ότι η ευθεία είναι **κατακόρυφη** (παράλληλη στον y΄y) 	$y - y_o = \lambda(x - x_o)$, λ η κλίση της ευθείας.
	<u>Ειδικές περιπτώσεις **με κλίση λ (τύποι συνάρτησης)**</u>
	$y=y_o$ όταν είναι οριζόντια **(κλίση λ=0)** (σχ. 1)
	$y = \lambda x + \beta$ όταν τέμνει τον y΄y στο (0, β) (σχ. 2)
	$y = \lambda x$ όταν περνά από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) (σχ.3)
	$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ όταν τέμνει τους άξονες στα (α, 0) και (0, β) με αβ≠0 (σχ. 4)



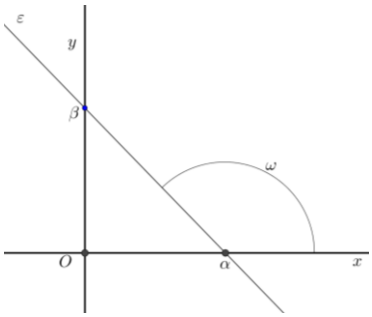
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Παραδείγματα.

1ο. Να βρείτε τις εξισώσεις των παρακάτω ευθειών:

α. Που διέρχεται από τα σημεία Α(2,3) και Β(-2,3)

β. Που διέρχεται από τα σημεία Α(3,5) και Β(3,6)

γ. Που διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και έχει συν.διευθ. 2

δ. Που διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και είναι παράλληλη στον χ΄χ,

ε. Που διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και είναι παράλληλη στον ψ΄ψ,

στ. Που διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και σχηματίζει γωνία 60° με τον χ΄χ,

ζ. Που διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και είναι παράλληλη προς το $\vec{\delta}$=(1,2)

η. Που διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και είναι κάθετη προς το $\vec{\delta}$ = (1,3).

Λύση

α[2]**.** Επειδή 2≠-2 η ευθεία έχει σ.δ. $\lambda = \frac{3-3}{2+2} = 0$ άρα η εξίσωσή της είναι

ψ = 3.

β. Αφού τα σημεία Α,Β έχουν ίδια τετμημένη η ευθεία είναι **χ = 3** (κατακό-ρυφη).

γ. Η ευθεία έχει εξίσωση την ψ – 3 = 2(χ-1) ⇔ **2χ–ψ+1 = 0**.

δ. Αφού είναι παράλληλη στον χ΄χ έχει σ.δ. λ =0 άρα η εξίσωση είναι **ψ = 3**.

ε. Αφού η ευθεία είναι παράλληλη στον ψ΄ψ δεν ορίζεται σ.δ. και η εξίσωση της είναι **χ = 1**.

στ. Η ευθεία έχει σ.δ. λ = εφ60^o = $\sqrt{3}$ άρα η εξίσωσή της είναι

ψ – 3 = $\sqrt{3}$(χ–1) ⇔ $\sqrt{3}$**χ – ψ –**$\sqrt{3}$**+3 = 0**.

ζ. Το διάνυσμα έχει σ.δ. $\lambda_1 = 2$ και αφού η ζητούμενη ευθεία ε είναι παράλληλη στην ε_1 θα έχει σ.δ. λ = 2.

Επομένως η εξίσωσή της είναι ψ – 3 = 2(χ –1) ⇔ **2χ – ψ + 1 = 0**.

η. Το διάνυσμα έχει $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ και αφού είναι κάθετο στην ζητούμενη ευθεία θα έχει

[2] Μπορούμε να πούμε και ότι, επειδή τα σημεία Α, Β έχουν ίδια τεταγμένη η ευθεία είναι οριζόντια με

σ.δ. λ και θα είναι $\lambda . \lambda_1 = -1$ δηλ. λ=3. Άρα η εξίσωσή της θα είναι $\psi - 3 = 3(\chi-1)$ $\Leftrightarrow$ **$3\chi - \psi = 0$.**

2ο. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχψ θεωρούμε τρίγ. ΑΒΓ με κορυφή το Α(3,1) και έστω ότι οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δύο από τα ύψη του έχουν εξισώσεις $7\chi - \psi - 1 = 0$ και $2\chi - 5\psi + 18 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ.

Λύση.

Επειδή οι συντεταγμένες του Α δεν επαληθεύουν καμμία από τις δεδομένες εξισώσεις οι ευθείες αυτές είναι φορείς των υψών υ_β, υ_γ.

Έστω $\upsilon_\beta : 7\chi - \psi - 1 = 0$ άρα $\lambda_{\upsilon\beta} = 7$ και $\upsilon_\gamma : 2\chi - 5\psi + 18 = 0$ με $\lambda\upsilon_\gamma = \frac{2}{5}$

Έτσι αφού $AB \perp \upsilon_\gamma$ έχουμε $\lambda_{AB} . \lambda_{\upsilon\gamma} = -1$, οπότε $\lambda_{AB} = -\frac{5}{2}$ επομένως η ΑΒ έχει εξίσωση $\psi - 1 = -\frac{5}{2}(\chi - 3) \Leftrightarrow$ **$5\chi+2\psi = 17$.**

Επίσης $A\Gamma \perp \upsilon_\beta$ άρα $\lambda_{A\Gamma}.\lambda_{\upsilon\beta} = -1$ δηλ. $\lambda_{A\Gamma} = -\frac{1}{7}$, οπότε είναι ΑΓ:

$\psi - 1 = -\frac{1}{7}(\chi-3) \Leftrightarrow$ **$\chi + 7\psi = 10$.**

Το Β σαν τομή των ΑΒ και υ_β είναι : $\left.\begin{matrix} 5\chi + 2\psi = 17 \\ 7\chi - \psi = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \chi = 1 \\ \psi = 6 \end{matrix}\right\}$. Άρα **Β (1,6)**.

Το Γ σαν τομή των ΑΓ, υ_γ είναι :

$\left.\begin{matrix} \chi + 7\psi = 10 \\ 2\chi - 5\psi = -18 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \chi = -4 \\ \psi = 2 \end{matrix}\right\}$. Άρα **Γ (–4,2)**.

ΙΙΙ. Έλεγχος για συνευθειακά σημεία και για είδη ευθυγράμμων σχημάτων.

Α. Συνευθειακά σημεία.

Για να ελέγχουμε αν τρία σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά θα :

Ελέγχουμε πρώτα αν τα σημεία έχουν την ίδια τετμημένη και αν συμβαίνει αυτό τότε αμέσως θα συμπεραίνουμε ότι βρίσκονται στην ίδια "κατακόρυφη "ευθεία .

εξίσωση $\psi = 3$.

Κατόπιν θα βρίσκουμε τους συν. διευθ. των ΑΒ και ΑΓ, λ_{AB} και $\lambda_{A\Gamma}$ και αφού θα είναι ίσοι θα έχουμε ότι ΑΒ//ΑΓ άρα τα σημεία θα ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Παράδειγμα.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(0,1), Β(-1,0) και Γ(1,2) είναι συνευ-θειακά.

Λύση.

Τα σημεία δεν βρίσκονται στην ίδια "κατακόρυφη" ευθεία και είναι :

$\lambda_{AB} = \frac{0-1}{-1-0} = 1$, $\lambda_{A\Gamma} = \frac{2-1}{1-(-1)} = 1$. Άρα είναι ίσοι που σημαίνει ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Β. Ευθύγραμμα σχήματα.

Στα προβλήματα αυτά μας ζητάται:

ή να προσδιορίσουμε ότι κάποιο σχήμα είναι συγκεκριμένου είδους .Δηλ. Ότι είναι τρίγ. ορθογώνιο, ισοσκελές , παραλληλόγραμμο, ρόμβος κλπ.

ή να προσδιορίσουμε κάποιο σημείο ώστε να ισχύει μια γεωμετρική ιδιότητα.

Θα εργαζόμαστε έχοντας υπ' όψη μας τις γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων που αναφέρονται ενώ στην δεύτερη περίπτωση θα έχουμε υπ' όψη μας ότι ένα σημείο μπορεί να προσδιοριστεί με τους εξής δύο τρόπους:

ι. Σαν τομή δύο γραμμών (προσδιορίζεται λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους)

ιι. Καλώντας το ζητούμενο σημείο (χ_o,ψ_o) και επιλύοντας ένα σύστημα για να προσδιοριστούν οι χ_o,ψ_o.

Παραδείγματα

1ο. Δίνονται τα σημεία Α(3,1), Β(9,-1), Γ(7,5) και Δ(1,7). Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Λύση.

Οι σ.δ. των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ είναι αντίστοιχα :

$\lambda_{AB} = \frac{-1-1}{9-3} = -\frac{1}{3}$, $\lambda_{B\Gamma} = \frac{-5+1}{7-9} = -2$, $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{7-5}{1-7} = -\frac{1}{3}$, $\lambda_{A\Delta} = \frac{7-1}{1-3} = -2$.

Επειδή είναι $\lambda_{AB} = \lambda_{\Gamma\Delta}$ και $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta}$ έχουμε ότι ΑΒ//ΓΔ και ΒΓ//ΑΔ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης είναι (ΑΒ) = $\sqrt{(3-9)^2+(1+1)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

και (ΒΓ) = $\sqrt{(7-9)^2+(5+1)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$, άρα το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες άρα είναι ρόμβος.

2ο. Να δείξετε ότι τα σημεία Α(-1,-3), Β(0,2), Γ(3,4) και Δ(8,3) είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου .

Λύση.

Οι πλευρές ΑΒ ,ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, του τετραπλεύρου έχουν σ.δ. τους :

$\lambda_{AB} = \frac{-3-2}{-1-0} = 5$, $\lambda_{B\Gamma} = \frac{4-2}{3-0} = \frac{2}{3}$, $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{4-3}{3-8} = -\frac{1}{5}$, $\lambda_{A\Delta} = \frac{-3-3}{-1-8} = \frac{2}{3}$.

Επειδή $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta} \Rightarrow$ ΑΔ //ΒΓ και αφού $\lambda_{AB} \neq \lambda_{\Gamma\Delta}$ οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Ακόμα είναι (ΑΒ) = $\sqrt{(-1-0)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ και

(ΓΔ) = $\sqrt{(3-8)^2+(4-3)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$, άρα (ΑΒ)=(ΓΔ) επομένως το τραπζιο είναι ισοσκελές.