Πρόσημο (τιμών) παραστάσεων (μιας μεταβλητής)

Η μελέτη του πρόσημου μια παράστασης έχει σημαντική παρουσία στη επεξεργασία διαφόρων θεμάτων.
Απαιτείται
στη απαλοιφή των απολύτων σε μια παράσταση,
στη λύση ανισώσεων που με τη σειρά τους μελετούν θέματα μεταβολών,
θέσεις γραμμών ως προς το οριζόντιο άξονα των συντεταγμένων κλπ..

Πως γίνεται

Γίνεται κυρίως με **παραγοντοποίηση** ή
με μετασχηματισμό της παράστασης ως **άθροισμα ομοσήμων όρων**.

Α. Η παράσταση αχ+β (πρωτοβάθμια) με α≠0.

Έχει ρίζα τον αριθμό $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

Το πρόσημο της περιγράφεται στο παρακάτω πίνακα.

		$-\frac{\beta}{\alpha}$	
Πρόσημο $\alpha x+\beta$	Ετερόσημο του α	0	Ομόσημο του α

Π.χ

Το πρόσημο της παράστασης $-x+3$ είναι
$-x+3>0$ όταν $x<3$
$-x+3=0$ όταν $x=3$
$-x+3<0$ όταν $x>3$.

Συμπεράσματα που περιγράφονται συνοπτικά στον πίνακα.
γιατί έχει ρίζα το 3 και πρόσημο μεγιστοβάθμιου συντελεστή αρνητικό.

		3	
Πρόσημο $-x+3$	+	0	−

Β. Το πρόσημο της παράστασης $αx^2+βx+γ$ με $α≠0$

Ακολουθούμε το παρακάτω πίνακα.

Διακρίνουσα $Δ = β^2 – 4αγ$	**Πρόσημο τιμών**
$Δ > 0$	**α >0** <table><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>προσ.</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>
	α <0 <table><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>προσ.</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr></table>
$Δ = 0$	<table><tr><td>**x**</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{β}{2α}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>***προσ.***</td><td>*Ομόσημο του α*</td><td>*0*</td><td>*Ομόσημο του α*</td></tr></table>
$Δ < 0$	**Πάντοτε ομόσημο του α**

Π.χ. Να μελετήσετε το πρόσημο των παρακάτω παραστάσεων:

$Α = 2x^2+3x–2$, $Β= –x^2+4x+21$, $Γ= 4x^2+12x+9$, $Δ = x^2+3x+5$, $Ε = –x^2+3x–3$.

Πίνακες προσήμου	***Εργασία στο πρόχειρο***
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Προσ. Α</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	Έχουμε $Δ = 9+16 = 25$, $x_1,x_2 = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}$ δηλ. $x_1 = -2$ ή $x_2 = \frac{1}{2}$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td></td><td>7</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Προσ. Β</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr></table>	Έχουμε $Δ = 16+84 = 100$ $x_1, x_2 = \frac{-4\pm\sqrt{100}}{-2}$ δηλ. $x_1 = -3$ ή $x_2 = 7$[1]
Γ[2] $= (2x+3)^2 \geq 0$ για κάθε τιμή του $x\in \mathbb{R}$. Διπλή ρίζα $x = -\frac{3}{2}$	
Επειδή $Δ = 9–20 = –11$ είναι $Δ = x^2+3x+5 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$	
Επειδή $Δ = 9–12 = –3$ είναι $Ε = –x^2+3x–3< 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$	

---

[1] Θα μπορούσαμε να παραγοντοποιήσουμε τη $Β = –(x^2–4x–21) = –(x–7)(x+3)$ αντί των τύπων

[2] Όταν έχουμε ταυτότητα δεν είναι απαραίτητο να κάνουμε χρήση της διακρίνουσας.

Γ. Ειδικές περιπτώσεις

Οι παραστάσεις $x^{2\nu}+\alpha$ με $\alpha>0$ και $\nu\in\mathbb{N}$ δεν παραγοντοποιούνται στο $\mathbb{R}$ και είναι πάντοτε **θετικές** ως άθροισμα θετικών όρων. Δηλ. $x^2+\alpha > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (όταν $\alpha>0$).

Δ. Οι παραστάσεις με βαθμό μεγαλύτερο του 2

Κάνουμε παραγοντοποίηση ώστε να προκύψουν πρωτοβάθμιοι ή δευτεροβάθμιοι παράγοντες. Μελετάμε το πρόσημο κάθε παράγοντα και συμπεραίνουμε το πρόσημο του γινομένου.

Πχ.

1ο Να μελετηθεί το πρόσημο των τιμών του πολυωνύμου

$P(x) = 2x^3-x^2-2x+1$ (με $x\in\mathbb{R}$)

Είναι $P(x) = x^2(2x-1) -(2x-1) = (2x-1)(x^2-1) =(2x-1)(x-1)(x+1)$.

Οι ρίζες του $P(x)$ είναι οι -1, $\frac{1}{2}$ και 1. Έτσι έχουμε

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
Πρόσημο $P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2ο Να μελετηθεί το πρόσημο του γινομένου

$P(x) = (2-x)(x^3+3x^2-x-3)(x^2+x+2)$ για τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Είναι $P(x) = (2-x)[x^2(x+3)-(x+3)])(x^2+x+2) = (2-x)(x+3)(x^2-1)(x^2+x+2)$

Η $2-x$ έχει ρίζα το 2.

Η $x+3$ έχει ρίζα -3

Η x^2-1 έχει ρίζες τις -1 και 1

Η $x^2+x+2 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού έχει $\Delta = 1-8= -7$.

Έτσι έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$	-3		-1		1		2	$+\infty$
προσ. $2-x$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
προσ. $x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
προσ. x^2-1	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
προσ. x^2+x+2	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
προσ. γινόμενου	**$-$**	**0**	**$+$**	**0**	**$-$**	**0**	**$+$**	**0**	**$-$**

Από το πίνακα έχουμε

Είναι $P(x) >0$ για $x\in(-3, -1)\cup(1, 2)$

$P(x) < 0$ για $x\in(-\infty, -3)\cup(-1, 1)\cup(2,+\infty)$

ενώ $P(x) = 0$ όταν $x = -3$ ή $x= -1$ ή $x= 1$ ή $x = 2$.