

1. Οι προβολές των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου πάνω στην υποτείνουσα είναι 3 cm και 12 cm. Να βρεθούν το ύψος από την ορθή γωνία και οι κάθετες πλευρές του τριγώνου.
2. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το Α και ΒΔ ύψος.
 - α. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:
 - i. $ΒΔ^2 = ΒΓ^2 - \dots\dots\dots$
 - ii. $ΒΔ^2 = ΑΒ^2 - \dots\dots\dots$
 - β. Αποδείξτε ότι: $ΒΓ^2 = 2 ΑΓ.ΔΓ$
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα.
Έστω $ΒΔ = κ$ και $ΔΓ = λ$, $0 < κ < λ$.
 - α. Αν είναι $ΒΓ = 10$ και $ΑΔ = 4$ να υπολογίσετε τα $κ$, $λ$.
 - β. Να αποδειχθεί (γεωμετρικά μόνο) η ανισότητα $\sqrt{κλ} < \frac{κ+λ}{2}$
4. Σε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με κορυφή το Α, έχουμε $ΒΓ = 4$ cm και $ΑΒ = 7$ cm. Να υπολογίσετε:
 - α. Το ύψος ΑΗ, β. Το ύψος ΒΚ.
5. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ ισοσκελούς τριγώνου ABΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) παίρνουμε $ΒΔ = ΑΒ$. Φέρνουμε το ύψος ΓΕ. Αν ισχύει $ΑΒ = 4ΒΕ$, να δείξετε ότι
$$ΓΔ^2 = ΒΓ^2 + \frac{3}{2} ΑΓ^2.$$
6. Έστω γωνία $χΟγ = 45^\circ$ και Μ τυχαίο σημείο στο εσωτερικό της. Από το Μ φέρνουμε κάθετη στην Οχ που την τέμνει στο Α. Αν την Ογ την τέμνει στο Β, αποδείξτε ότι:
$$ΑΒ^2 + ΑΜ^2 = ΟΜ^2.$$
7. Ενός τετραπλεύρου ABΓΔ οι διαγώνιοι τέμνονται καθέτως.
Να αποδειχθεί ότι: $ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΒΓ^2 + ΑΔ^2.$
8. Στη διαγώνιο ΒΔ τετραγώνου ABΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ο. Να αποδειχθεί ότι:
$$ΓΔ^2 - ΓΟ^2 = ΒΟ \cdot ΟΔ.$$

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και η διάμεσός του AM . Αν η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας BAM και η AE διχοτόμος της γωνίας MAG , να αποδείξετε ότι:
- $$\left(\frac{B\Delta}{\Delta M}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma E}{EM}\right)^2 = 4.$$
10. Ενός ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ η μεγάλη βάση του AB είναι διπλάσια της πλευράς $A\Delta$ και η γωνία $A = 60^\circ$. Αν είναι γνωστό ότι το μήκος της πλευράς $A\Delta$ είναι 6, να υπολογιστούν:
- α. το ύψος του τραπεζίου και β. η άλλη βάση $\Gamma\Delta$.
11. Οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $AB = 3 \text{ cm}$, $B\Gamma = 5 \text{ cm}$, $A\Gamma = 7 \text{ cm}$.
- α. Να δείξετε ότι η γωνία B είναι αμβλεία.
- β. Να υπολογίσετε την προβολή $B\Delta$ της πλευράς AB πάνω στη $B\Gamma$.
- γ. Να υπολογίσετε τη γωνία B .
12. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$. Αν $B\Delta$ είναι το ύψος του, τότε να δείξετε ότι:
- α. $A\Delta = \frac{\gamma}{2}$,
- β. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$.
13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$). Προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\Delta^2 = 2B\Gamma \cdot A\Delta$.
14. Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο Δ στην προέκταση χορδής AG προς το Γ . Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 - B\Delta^2 = 2A\Delta \cdot A\Gamma - 4R^2$.
15. Στο διπλανό σχήμα είναι τεταρτοκύκλιο κέντρου O και τόξου AB . Να αποδείξετε ότι για το τυχαίο σημείο M ισχύει :
- α. $\hat{AMB} = 135^\circ$
- β. $AB^2 = AM^2 + BM^2 + AM \cdot BM \cdot \sqrt{2}$
16. Αν Δ είναι τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδειχθεί ότι
- $$AB^2 \cdot \Gamma\Delta + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = A\Delta^2 \cdot B\Gamma + B\Gamma \cdot B\Delta \cdot \Gamma\Delta.$$
- Εξετάστε τις περιπτώσεις: α. $A\Delta$ διχοτόμος, β. $A\Delta$ διάμεσος
- Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση τα $A\Delta$ συναρτήσει των πλευρών α, β, γ .

