ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ.15
β) i. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 35
ii. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 35-36

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 142

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 135

Α4. α) Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 134. Λάθος

β) Λάθος, π.χ. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\neq f(1)$$

Α5. Σωστό το (γ).

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=e^{-x}+\lambda$, $x\in IR$ και $\lambda\in IR$.

Β1. Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=2$.

Β2. Θεωρώ τη g με $g(x)=f(x)-x=e^{-x}+2-x$, $x\in IR$.
g συνεχής στο IR ως διαφορά των συνεχών f(x), x
$g'(x)=-e^{-x}-1<0$, για κάθε $x\in IR$ οπότε g γν. φθίνουσα στο IR και άρα «1-1».
g συνεχής στο [2,3] με $g(2)\cdot g(3)=e^{-2}\cdot(e^{-3}-1)<0$ οπότε από θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(2,3)$: $g(x_0)=0$
Το x_0 είναι μοναδικό διότι η g είναι «1-1».

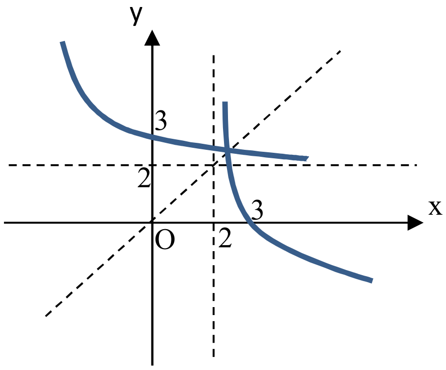
Β3. $f'(x)=-e^{-x}<0$, για κάθε $x\in IR$. Άρα, f γν. φθίνουσα στο IR οπότε και «1-1».
Δηλαδή ορίζεται η f^{-1} με $D_{f^{-1}}=f(IR)=(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x))=(2,+\infty)$ και για κάθε $x\in IR$,
$y=f(x)\Leftrightarrow y=e^{-x}+2\Leftrightarrow y-2=e^{-x}\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$ δηλαδή $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$.

Β4. f^{-1} συνεχής στο $(2,+\infty)$ ως σύνθεση της συνεχούς x-2 με την -lnx.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-\ln(x-2))\overset{t=x-2}{=}\lim_{t\to 0^+}(-\ln t)=+\infty .$$

Άρα, η ε: x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.
Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των C_f και $C_{f^{-1}}$. Η γραφική παράσταση της f

προκύπτει από μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω και παράλληλα με τον y΄y της συνάρτησης e^{-x}. Η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει από μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και παράλληλα με τον x΄x της συνάρτησης – lnx.



ΘΕΜΑ Γ

f(x)=$\begin{cases} x^2+\alpha, & x\ge 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$, D_f=IR.

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο IR είναι και στο x_0=1 οπότε είναι και συνεχής.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+\alpha)=\lim\limits_{x\to 1^+}(e^{x-1}+\beta x)=1^2+\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1+α=1+β $\Leftrightarrow$ α=β (1) και

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}+\alpha\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$1+α=2$\Leftrightarrow$α=1, διότι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\underset{d\ell H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}}{1}=1$ και (1)$\Leftrightarrow$β=1.

Γ2. f(x)=$\begin{cases} x^2+1, & x\ge 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$, D_f=IR.

f΄(x)=2x>0, για κάθε x>1. Άρα, f γνησίως αύξουσα στο [1,+∞).

f΄(x)=e^{x-1}+1>0, για κάθε x<1. Άρα, f γνησίως αύξουσα στο (-∞,1] αφού f συνεχής στο 1.

Επομένως, f γνησίως αύξουσα στο IR και f(IR)=$(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x))=(-\infty,+\infty)$.

Γ3. i. 0∈f(IR) οπότε υπάρχει x_0∈IR ώστε f(x_0)=0. Το x_0 είναι μοναδικό διότι f γν. αύξουσα και άρα «1-1» στο IR. Παρατηρώ ότι f(x_0)=0 και f(0)=$\frac{1}{e}$ >0 δηλαδή

f(x_0)<f(0) $\overset{\text{f γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow}$ x_0<0.

ii. $f^2(x)-x_0f(x)=0\Leftrightarrow f(x)(f(x)-x_0)=0\Leftrightarrow f(x)=0$ ή $f(x)=x_0$, αδύνατο

διότι f(x)=0$\Leftrightarrow$f(x)=f(x_0) $\overset{\text{f "1-1"}}{\Leftrightarrow}$ x=x_0 απορρίπτεται διότι x∈(x_0,+∞) και

για κάθε x∈(x_0,+∞) έχω x>x_0 $\overset{\text{f γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow}$ f(x)>f(x_0)$\Leftrightarrow$f(x)>0 ενώ x_0<0.

Γ4. $x(t_0)=3$, $y(t_0)=10$, $x'(t_0)=2$, σύμφωνα με τα δεδομένα.

$E=\frac{1}{2}x(x^2+1) \Leftrightarrow E=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x$ ή $E(t)=\frac{1}{2}x^3(t)+\frac{1}{2}x(t)$, $t\geq 0$.

$E'(t)=\frac{3}{2}x^2(t)x'(t)+\frac{1}{2}x'(t)$ για κάθε $t\geq 0$.

Για $t=t_0$, $E'(t_0)=\frac{3}{2}x^2(t_0)x'(t_0)+\frac{1}{2}x'(t_0)=\frac{3}{2}\cdot 3^2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2=28$τ.μ./sec.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in IR$

ε: $y=-x+2$, $A(1,1)$

Δ1. $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{1}{x^2-2x+2}\cdot(2x-2)+\alpha$, για κάθε $x\in IR$. Πρέπει $f(1)=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=1$ και $f'(1)=-1\Leftrightarrow 0+\alpha=-1\Leftrightarrow\alpha=-1$ οπότε $\beta=2$.

Δ2. $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2$, $x\in IR$

$E=\int_1^2|f(x)-y|\,dx=\int_1^2|(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2+x-2|\,dx=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)dx$

διότι $x\in[1,2]$ οπότε $x-1\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$ και

$x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1\Leftrightarrow\ln(x^2-2x+2)\geq\ln 1=0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντικατάστασης έχω:

$u=x^2-2x+2$, $du=(2x-2)dx\Leftrightarrow\frac{1}{2}du=(x-1)dx$ και $x=1\Leftrightarrow u=1$, $x=2\Leftrightarrow u=2$.

Άρα, $E=\int_1^2\frac{1}{2}\ln u\,du=\frac{1}{2}\left(\left[u\ln u\right]_1^2-\int_1^2 u\cdot\frac{1}{u}du\right)=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)=\ln 2=\frac{1}{2}$.

Δ3. i. $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+2\frac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2x^2-4x+2-x^2+2x-2}{x^2-2x+2}=$

$=\ln(x^2-2x+2)+\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$, $x\in IR$.

$f''(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{(2x-2)(x^2-2x+2)-(2x-2)(x^2-2x)}{(x^2-2x+2)^2}=$

$=\frac{(2x-2)(x^2-2x+2)+(2x-2)\cdot 2}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2}$, $x\in IR$

Πιθανές θέσεις τ.α. της f' οι ρίζες της $f''(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f'(x)$	↘		↗
		ελ. $f'(1)=-1$	

Δηλαδή $f'(x)\geq f'(1)\Leftrightarrow f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in IR$.

ii. Θέλω ν.δ.ο. $f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq-1$, για κάθε $\lambda\in IR$.

Έστω ένα $\lambda\in IR$. Η f είναι συνεχής στο $[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}]$ και παραγωγίσιμη στο $(\lambda, \lambda+\frac{1}{2})$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0\in(\lambda,\lambda+\frac{1}{2})$ ώστε

$$f'(x_0)=\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}=\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\ .$$

Όμως σύμφωνα με το Δ3.i, έχω $f'(x_0)\geq-1\Leftrightarrow\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq-1\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$.

Δ4. $g(x)=-x^3-x+2$, $x\in IR$

$g'(x)=-3x^2-1$, $x\in IR$

Για να εφάπτεται η ε: $y=-x+2$ στη C_g πρέπει να υπάρχει $x_0\in IR$ ώστε

$g'(x_0)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow-3x_0^2-1=-1\Leftrightarrow-3x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0$ και $g(x_0)=-x_0+2\Leftrightarrow2=2$, που ισχύει. Δηλαδή η (ε) εφάπτεται και στη C_g στο σημείο (0,2).

Η (ε) είναι μοναδική διότι $f'(x)\geq-1$ για κάθε $x\in IR$ και $g'(x)\leq-1$ για κάθε $x\leq IR$ με τις ισότητες, σύμφωνα με τα προηγούμενα, να ισχύουν αντίστοιχα μόνο για x=1 και x=0.