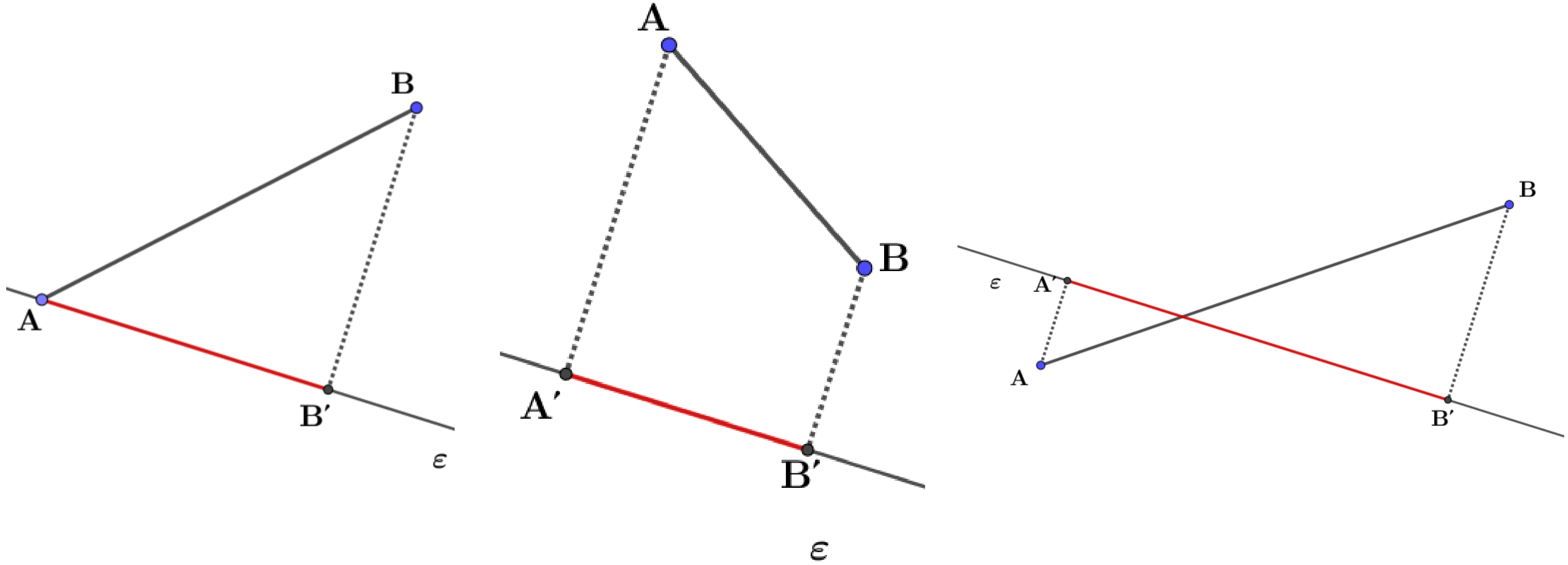
Νόμος συνημιτόνου

Ενότητα α. Μέτρηση μήκους ευθ. τμημάτων
Προβολή ευθ. τμήματος

Η προβολή τμήματος σε ευθεία



$$\text{προβ}_{ε}(AB) = (AB)\cdot\text{συν}ω$$

Η γενίκευση μέτρησης τμημάτων

Ένα τμήμα «μετριέται» με χρήση του **Πυθαγορείου θεωρήματος,** κυρίως. Η διάσημη πρόταση όμως γίνεται ειδική περίπτωση του παρακάτω νόμου που αποδεικνύεται με την χρήση της, όμως.

Νόμος συνημιτόνου

Σε κάθε τρίγωνο, το τετράγωνο της μια πλευράς του, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων , των δύο άλλων πλευρών του μειωμένο με το διπλάσιο γινόμενο των πλευρών αυτών επί συνημίτονο της περιεχόμενης σε αυτές γωνίας.

Δηλ.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A$$

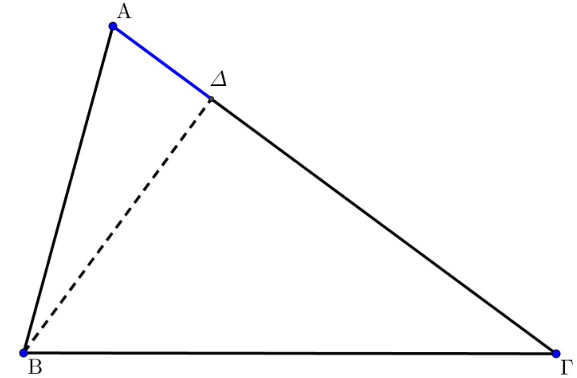
$$\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma\,\text{συν}B$$

$$\gamma^2=\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma$$

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓ οξυγώνιο τρίγωνο και ΒΔ το ύψος από την κορυφή Β.

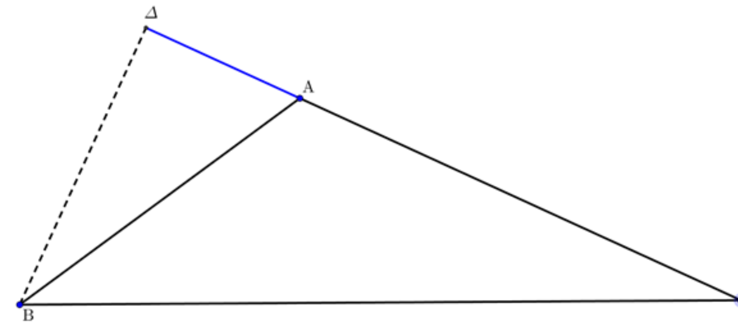
Τότε $ΑΔ = προβ_{ΑΓ}(ΑΒ) = (-)\mathbf{ΑΒ \cdot συνΑ}$ **(1)**



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο ΑΒΔ, έχουμε

$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2$ **(2)**.

Όμοια από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΒΓΔ έχουμε $ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΓΔ^2$



Άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2 + (ΑΓ + ΑΔ)^2$ (από 2)

$\Rightarrow ΒΓ^2 = ΑΒ^2 - \cancel{ΑΔ^2} + ΑΓ^2 + 2ΑΓ \cdot ΑΔ + \cancel{ΑΔ^2}$

$\Rightarrow ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + 2ΑΓ(-)\mathbf{ΑΒ \cdot συνΑ}$ (από την **(1)**)

Όταν έχουμε αμβλυγώνιο στο Α

τότε επειδή οι αμβλείες γωνίες έχουν αντίθετα συνημίτονα με τις παραπληρωματικές τους οξείες

το μόνο που αλλάζει είναι «το πρόσημο»

Οπότε έχουμε την σχέση $\boldsymbol{α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ}$,
που είναι η έκφραση του ν. συνημιτόνου.

Σχόλιο

Με τις σχέσεις της προβολής και του ν. συνημιτόνου υπολογίζονται μήκη ευθυγράμμων τμημάτων (πλευρές πολυγώνων, χορδές, κλπ)