ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α 1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, παράγραφος 1.3

Α 2. α. Θεωρία σχολικού βιβλίου, παράγραφος 2.1

β. Θεωρία σχολικού βιβλίου, παράγραφος 2.1

Α 3. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

β. Λάθος

β. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β 1. Αφού όλες οι παρατηρήσεις είναι θετικές, ισχύει και $\overline{x} > 0$ άρα $|\overline{x}| = \overline{x}$. Επίσης, $s^2 = 4 \Rightarrow s = 2$.

Επειδή $CV = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, πρέπει $\frac{s}{\overline{x}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2}{\overline{x}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \ \overline{x} = 10$.

Β 2. Αφού $\overline{x} = 10$ πρέπει $\frac{\sum_{i=1}^{6} t_i}{6} = 10$ δηλαδή $\frac{52+\kappa}{6} = 10$ άρα κ=8.

Β 3. Για κ=8 οι παρατηρήσεις είναι σε αύξουσα σειρά: 7, 8, 10, 11, 11, 13 και επειδή ν=6 (άρτιος)

έχουμε $\delta = \frac{10+11}{2} = 10{,}5$. Επίσης, το εύρος ισούται με $R = 13 - 7 = 6$.

Β 4. Έστω ότι οι παρατηρήσεις που θα προκύψουν είναι $y_1, \dots, y_6$. Η σχέση που συνδέει τις νέες παρατηρήσεις με τις προηγούμενες είναι $y_i = t_i - 2, i = 1, .., 6$. Συνεπώς βρίσκουμε:

$\overline{y} = \overline{x} - 2 = 8$, $s_y = s = 2$. Συμπεραίνουμε πως ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι

$CV_y = \frac{2}{8} \cdot 100\% = 25\% > 10\%$ άρα το νέο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ 1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}} \cdot (x^2 - 2x + 10)' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$.

Γ 2. $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} = 0$ άρα $x - 1 = 0$ δηλαδή x=1. Επειδή ο παρονομαστής της f' είναι θετικός, τα πρόσημα της f’ εξαρτώνται μόνο από τον αριθμητή και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f’	$-$		$+$
f	↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x=1 το f(1)=3. Άρα ισχύει $f(x) \geq 3$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Γ 3. Η εφαπτομένη είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$, με $\lambda = f'(5) = \frac{4}{5}$. Επίσης, η εφαπτομένη διέρχεται

από το $M\big(5, f(5)\big)$ δηλαδή το M(5, 5) άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν. Για $x = y = 5$ και λ=4/5 βρίσκουμε $5 = \frac{4}{5} \cdot 5 + \beta$ δηλαδή β=1.

Τελικά (ε): $y = \frac{4}{5}x + 1$.

Γ 4. Για x=0, y=-5/4. Για y=0, x=1. Άρα τα σημεία είναι Α(-5/4, 0) και Β(0,1) αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ 1. Για λ=3, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$.

Τα πρόσημα της f’ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f’	$+$		$+$
f	↗		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R καθώς είναι συνεχής στο 1. Αφού $\frac{3}{8} < \frac{5}{6} \Rightarrow f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right)$ λόγω μονοτονίας της f.

Δ 2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)x(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}=6$$

Δ 3. Ο συντελεστής διεύθυνσης σε κάθε σημείο $M\big(x, f(x)\big)$ της C_f είναι ίσος με $\lambda = f'(x)$.

Έχουμε: $f''(x) = 6x - 6$. $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$.

Τα πρόσημα της f’’ και η μονοτονία της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f’’		$-$		$+$	
f’		↘		↗	

Η f’ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο χ=1. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Ν(1, f(1)) δηλαδή το Ν(1,1).

Δ 4. Επειδή $f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$, για να μην παρουσιάζει ακρότατα η f πρέπει και αρκεί $\Delta \leq 0$.

Αφού Δ=36-12λ έχουμε: $36 - 12\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \geq 3$. Άρα $\lambda_{min} = 3$.