

ΘΕΩΡΙΑ

Μιγαδικοί αριθμοί

- Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 .
Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. (1A1/2001-2007)
- Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:
α. $|z|^2 = z \bar{z}$ β. $|z^2| = z^2$ γ. $|z| = -|\bar{z}|$
δ. $|z| = |\bar{z}|$ ε. $|i \bar{z}| = |z|$ (1A2/2001)
- (*) Αν $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ και $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να αποδείξετε ότι:
 $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$ (1A/2002 ΙΟΥΛ)
- Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης I του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης II που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. (1A/2001 Εσπ)

Στήλη I	Στήλη II
A. $\operatorname{Re}(z)$	1. $-\alpha - \beta i$
B. $\operatorname{Im}(z)$	2. $\alpha - \beta i$
Γ. $-z$	3. $\alpha + \beta$
Δ. $\bar{z}$	4. α
E. $ z $	5. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
ΣΤ. $z \cdot \bar{z}$	6. $\alpha^2 + \beta^2$
	7. β

Συναρτήσεις Όρια συνέχεια

5. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$; Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . (A2 2018 επ)
6. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; (1A2/2007 , A2/2012 επ, A2/ 2016)
7. Πότε μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1; (A2/2015 επ)
8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.
α. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;
β. i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;
ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ; (Θέμα A1/2019)
9. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη.»
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα A , αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής,
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (A2/2018)
10. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής (Πολλές φορές)
11. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ; (1B/ Ιουλ. 2009)
12. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; (A3/2012)
13. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$; (1A3/Ιουλ 2010 & A3/2014)
14. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; (1A3/2007, A3/2016 Ιουλ))

15. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
 «Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $= -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».
- α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα Ψ, αν είναι **ψευδής**.
- β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Α3 2018 επ)
16. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$
(1Α2/2008 κ' Α2/2012 κ' Α3/ 2017)
17. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano. (Α2/2014 επ)
18. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; (1Γ/ΙΟΥΛ 2003 , Α2/2010, Α3/ 2015 επ, Α3/2020 επ. π.)

Παράγωγος

19. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
(1Β/2009)
20. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της;
(1Α2/Ιουλ. 2010 και 2013)
21. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α $(x_0, f(x_0))$.
(1Α1/2000)
22. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
(1Α2/2000-2007-2013 επ-2018 2022 επαν)
23. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
 «Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Α2/2017)

24. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (1Α/Ιουλ. 2009)

25. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$. (1Β1/2002 & 1Α1/Ιουλ. 2010)

26. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$. (1Α/ ΙΟΥΛ2011)

27. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (1Α1/2008)

28. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle. (Α3/2012 επ)

29. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού; (1Α1/ΙΟΥΛ 2007)

30. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; (1Β/2008, 2013, 2022επ)

31. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. (Α3/2016, Α3/2019 επ)

32. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . (1Α/2009 & Α1/2014)

33. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$. (1^A/2011-2013 επ-2016 επ-2017επ)
34. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (A1/2014 επ κ' 2018 επ)
35. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
 α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .
 β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
 γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .
 (1B1/2000)
36. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται *κρίσιμα σημεία* της f ; (A3 2013 επ)
37. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; (1B/2011 2022 επ)
38. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
 (A1/ 2012 επ, A1/2019επαν κ' 2016, A1 2020 επ. π.)
39. Α. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
 α. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ . (A1/2017)
 β. Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f ;
 Β.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε

πρόταση

α. Η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β. Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2\eta\mu x + \frac{1}{\eta\mu^2 x} + 3$, όπου $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ είναι γνησίως
αύξουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi)$.

γ. Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως
φθίνουσα στο Δ

(1/Σεπ 2001)

40. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

(A3/2010 & A2/2014)

41. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα Ψ, αν είναι **ψευδής**.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α). (A4/2020, επ . π.)

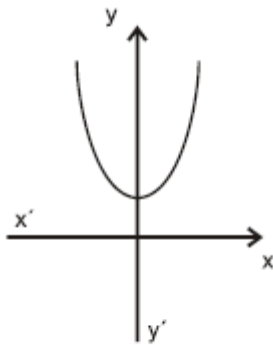
42. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f »

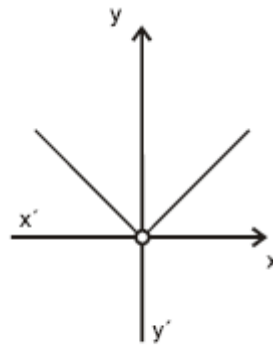
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. . (A2/2017 επ)

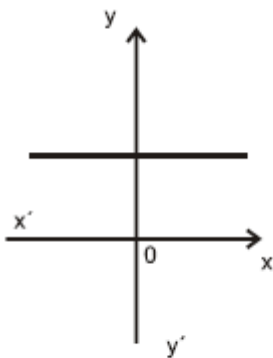
43. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T .



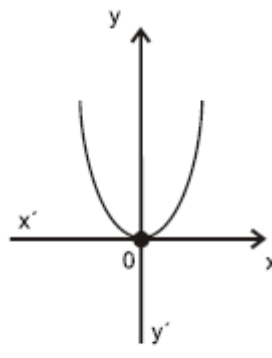
(f)



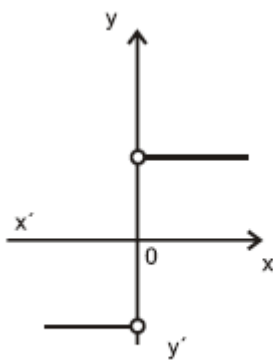
(g)



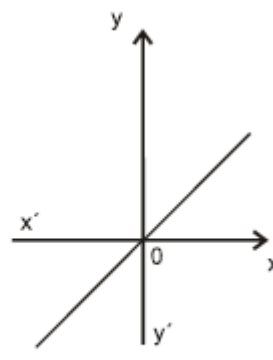
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g . (A3 2018 επ)

Ολοκλήρωμα

44. Έστω μία συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ . (1B/ 2011 επ, 2014 επ κ' A2/2019 επ)

45. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(A2/2001 επ, 1A /IOΥΛ 2003 , A1/2010, A1/2015 επ)

46. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \dots\dots\dots$

β. $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \dots\dots\dots$

γ. $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \dots\dots\dots$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

(1A/IOΥΛ 2001)

47. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. (A3/2018)

48. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(1A/2002 & IOΥΛ 2008 & ΜΑΙ 2013)

49. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

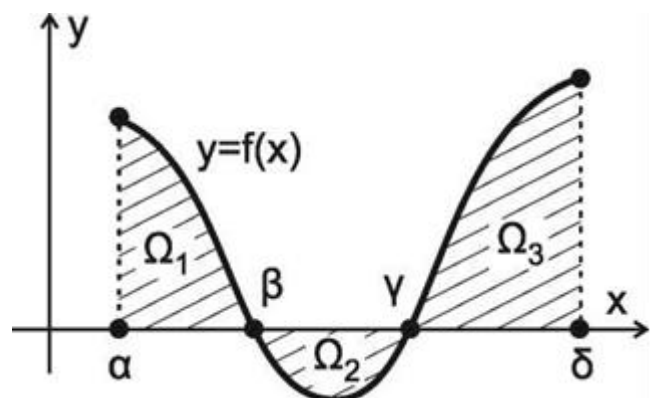
Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 , Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) =$

1 και $E(\Omega_3) = 3$, τότε το $\int_a^{\beta} f(x) dx$

είναι ίσο με:

α. 6 β. -4, γ. 4, δ. 0 ε. 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.



(Θέμα A5/2019)

Συνδυαστικά

50. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- i. Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$
 - ii. Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με π.ο. A ισχύει $f(f^{-1}(x))=x$, για κάθε $x \in A$.
 - iii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
 - iv. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
 - v. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή, M και μια ελάχιστη τιμή, m . (Θέμα 1ο/2021)
51. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση
- i. Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - ii. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
 - iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .
 - iv. Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $f \circ g$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.
 - v. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

- vi. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.
- vii. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.
- viii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.
- ix. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- x. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- xi. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.
- xii. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- xiii. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- xiv. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
- xv. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- xvi. Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} .
- xvii. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.
- xviii. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
- xix. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
- xx. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

- xxi. Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
- xxii. Αν μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(\psi)) = \psi, \psi \in f(A)$.
- xxiii. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - l] = 0 .$$
- xxiv. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- xxv. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- xxvi. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- xxvii. Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty)$.
- xxviii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- xxix. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- xxx. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- xxxi. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- xxxii. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$.
- xxxiii. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- xxxiv. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

xxxv. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$

κοντά στο x_0 , με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

xxxvi. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$

xxxvii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

xxxviii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

xxxix. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

xl. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

xli. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

xlii. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

xlili. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$.

xliv. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

xlv. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

xlvi. Αν είναι $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

xlvii. Αν είναι $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

xlviii. Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = 0$.

xliv. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

i. Υπάρχει πολωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

- lii. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- liii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.
- liv. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $(\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.
- lv. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .
- lvi. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.
- lvii. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- lviii. Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- lix. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη **$f(\beta) > 0$** .
- lx. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
- lxi. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
- lxii. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.
- lxiii. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

- lxiv. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

- lxv. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ln |x|]' = \frac{1}{x}$.

lxvi.

- lxvii. Ισχύει ο τύπος, $(3^x)' = x 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- lxviii. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma \phi x$ είναι παραγωγίσιμη είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 =$

$$\mathbb{R} - \{x \mid \eta \mu x \neq 0\} \text{ και ισχύει } f'(x) = -\frac{1}{\eta \mu^2 x}.$$

- lxix. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, b]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

- lxx. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

- lxxi. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και σημείο $x_0 \in [a, b]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

- lxxii. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

- lxxiii. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, b) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, b) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

- lxxiv. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε

$$\text{ισχύει: } \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$$

lxxv. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν G είναι μία

παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

lxxvi. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του

Δ , τότε $\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt \right)' = f'(g(x))g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα

χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

lxxvii. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν

στο διάστημα αυτό και $\int_a^b f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον

ετερόσημες τιμές στο $[a, b]$.

lxxviii. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει

$f(x) \geq 0$ τότε $\int_a^b f(x)dx > 0$.

lxxix. Αν $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

lxxx. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f στο $[a, b]$. Αν $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, τότε

$\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

lxxxii. Αν $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

lxxxiii. Ισχύει η σχέση $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

52. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

γ. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ,

$$\text{ισχύει: } \int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

(1/2003)

53. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad (\text{ 1B/ΙΟΥΝ 2003})$$

54. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

β.

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση fg είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$$

δ. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα

Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι

μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_a^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

(1/2004)

55. Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

• η f είναι συνεχής στο Δ και

• $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου

ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(1^ο /Ιουλ 2004)

56. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο

του Δ , τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$. (1B/2005)

57. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

γ. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα. (1B/IOYA 2005)

58. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$. (1B/2006)

59. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \quad (1B/Ιουλ 2006)$$

60. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f , είναι διάστημα.

β. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx$$

γ. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του

$$\Delta, \text{ τότε } \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

δ. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. (1B/IOYA 2007)

61. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $az^2 + \beta z + \gamma = 0$ με

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

γ. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx \quad (1B/2008)$$

62. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

β. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε: $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$. (1B/IOΥΛ2008)

63. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

β. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική

παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

(1Γ/2009)

64. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n.$$

β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \operatorname{erf} x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\} \text{ και ισχύει } f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

γ. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ,

ισχύει $\int f'(x)dx = f(x) + c$, $x \in \Delta$ όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

(1Γ/Ιούλ. 2009)

65. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $a+bi$ και $\gamma+di$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτινών τους.

β. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

γ. $(\sin x)' = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Α4/2010)

66. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = x a^{x-1}$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta], \text{ τότε } \int_a^\beta f(x)dx \geq 0$$

γ. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z^2| = z \bar{z}$.

(1Α4/ Ιουλ 2010)

67. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε $z^0 = 1$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x/\sin x \neq 0\}$ ισχύει: $(\operatorname{ef} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ (1Γ/2011)

68. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\beta$.

β) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. (1Γ/ΙΟΥΛ 2011)

69. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που ί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

δ. $(\operatorname{σφ} x)' = \frac{1}{\eta \mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta \mu x = 0\}$

ε. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f' , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$. (A4/2012)

70. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

β. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G

είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

(A4/2012 επ)

71. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί. (A4/ 2013)

72. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$

δ. Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \quad (A4\ 2013\ \epsilon\pi)$$

73. Ομοίως

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$,

$$\text{τότε ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx.$$

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παραγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .

(A4/2014)

74. Ομοίως.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

γ) $\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt \right)' = f(g(x))g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα

σύμβολα έχουν νόημα.

(A4/2014 επ).

75. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$, όπου n θετικός ακέραιος.

β. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$ και G είναι μία

παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε πάντοτε ισχύει: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

(A4/2015 Ιουλ)

76. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε

το $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

β) Κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, είναι σταθερή στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$.

(2016 A4)

77. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

γ. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[a, b]$, ισχύει: αν $\int_a^b f(x)dx > 0$, τότε $f(x) > 0$

στο $[a, b]$.

(A4/2016 επ)

78. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (A4/2017)

79. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε

α. η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β)

β. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο (α, β)

γ. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β) .

δ. δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β) . (A3 2017 επ)

80. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο

$$[\alpha, \beta] \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta).$$

β.

γ.

δ. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$, τότε

$f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. (A4 2017 επ)

81. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. (A4/2018)

82. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη «**Σωστό**», αν η πρόταση είναι σωστή, ή «**Λάθος**», αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- α. Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A .
- β. Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 . **(Θέμα Α4/2019)**

83. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παρ. της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

- β. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$, ισχύει:

$$\text{Αν } \int_a^b f(x)dx = 0, \text{ τότε } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

- γ. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f . **(Α4/2019 επ)**

84. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι **σωστή**, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι **λανθασμένη**.

- α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$, για κάθε x κοντά στο x_0 .

- β. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε $f(a) \neq f(b)$.

- γ. Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **(Α5/2020 π)**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μιγαδικοί αριθμοί

85. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της Στήλης Β έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $ z_1 \cdot z_2 $	α. 4 β. 2
2. $ z_1 ^2$	γ. 25
3. $ z_2 ^2$	δ. -5
4. $-\overline{ z_1 }$	ε. -2
5. $i z_2 $	στ. 5
	ζ. 10

(1B1/2001)

86. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z .

α. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$

$$\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha.$$

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

(2/2003)

87. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

(1B2/2001)

88. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

γ. Δείξτε ότι : $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|$ (2/2005)

89. α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z + 16| = 4|z + 1|$

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z - 1| = |z - i|$

γ. Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

(2/ΙΟΥΛ 2001)

90. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει: $\left| \frac{z - 1}{z - i} \right| = 1$.

(2βΤΕΧ/2000)

91. α. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 2z + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι $z_1^{20} - z_2^{20} = 0$.

β. Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης του α. ερωτήματος, με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου n για τις οποίες z_1^n είναι πραγματικός αριθμός

γ¹. Να βρείτε τον πίνακα της συμμετρίας με την οποία μπορεί να προκύψει από την εικόνα της ρίζας z_1 η εικόνα της ρίζας z_2 .

(2/Σεπ 2001)

92. Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί

α. Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$.

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w , για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$

(2/2008)

¹ Εκτός ύλης 2009-10

93. α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1+z_2=4+4i$ και $2z_1-\bar{z}_2=5+5i$, να βρείτε τους z_1, z_2 .

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν

$$|z-1-3i| \leq \sqrt{2} \text{ και } |w-3-i| \leq \sqrt{2}$$

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί

z, w έτσι, ώστε $z = w$ και

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

(2° /ΙΟΥΛ 2005)

94. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i, \lambda \in \mathbb{R}$$

A. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

B. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$ όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

(2°/2009)

95. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών

$z = x+yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

γ. Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 40$.

(1B/Ιούλ. 2009)

96. α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = 2 \text{ και } \operatorname{Im}(z) \geq 0.$$

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ) ,

τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$. (2/ΙΟΥΛ 2003)

97. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z-3i| + |\bar{z} + 3i| = 2$ και $w = z-3i + \frac{1}{z-3i}$

B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

B2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z-3i}$

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$.

B4. Να αποδείξετε ότι: $|-w| = |z|$ (2⁰/2011)

98. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w , οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \text{Im}(z) \quad (1)$$

$$w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

είναι η παραβολή με εξίσωση $\psi = \frac{1}{4}x^2$.

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

B3. Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z = w$.

B4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ , έτσι ώστε το τετράπλευρο με τα σημεία K, A, Λ, B να είναι τετράγωνο.

(2/ ΙΟΥΛ 2011)

99. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

ii. $|z_1 - z_2| \leq 4$ και $\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν. (3/ 2006)

100. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ για $\alpha=0$

και $\alpha=2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2n} = (-z_2)^n$ για κάθε φυσικό αριθμό n .

(2° / 2007)

101. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$, όπου

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι $(z_1+1+i)^{20} - (\bar{z}_1+1-i)^{20} = 0$.

(4° / ΙΟΥΛ 2007)

102. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1-i)| = |w - (3-3i)| \quad \text{τότε να βρείτε:}$$

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

(2° / 2008)

103. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = i$.

α) Να γράψετε τους z_1 και z_2 σε τριγωνομετρική μορφή.

β) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 \cdot z_2$.

(1B/2001 Εσπ)

104. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1)$$

$$|w-5\bar{w}|=12 \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του } |w|$$

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \leq |z-w| \leq 4$ (B/2012)

105. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

B1. $|z| = 1$.

B2. Ο αριθμός $(z - \frac{1}{z})^4$ είναι πραγματικός.

B3. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) (z_1 + z_2) \leq 4$, όπου δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z .

B4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u , για τους οποίους ισχύει $u - ui = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. (B/2012 επ)

106. ²Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{5+i}{2+3i}$

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

Στις ερωτήσεις γ), δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του τος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

γ) Αν $\theta = \text{Arg}z$, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:

A. $\frac{\pi}{4} - \theta$ B. $\frac{\pi}{2} + \theta$ Γ. $\theta - \frac{\pi}{2}$ Δ. $\pi + \theta$

δ) Το z^4 είναι ίσο με:

A. 4 B. $4i$ Γ. $-4i$ Δ. -4

(2ATEX/2000)⁽²⁾

107. ⁽²⁾Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{2z+i}{\bar{z}-2i}$, $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z .

Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$w_1 = f(9-5i)$ $w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004}$ (2α/2000)⁽²⁾

108. ⁽³⁾Εστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(v) = i^v z$, $v \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

β. Αν $|z| = \rho$ και $\text{Arg}(z) = \theta$, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right]$$

γ. Αν $|z| = 2$ και $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με

κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0 , z και $f(13)$.

(2/2002)⁽³⁾

109. Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$.

B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

B2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w
στο μιγαδικό επίπεδο.

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος B3, να

αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$

(2° /2010)

110. Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης
δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -2 \text{ και } z_1 z_2 = 5$$

B1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

B2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό
επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x + 1)^2 + y^2 = 4$

B3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος B2 να βρείτε εκείνους
για τους οποίους ισχύει $2 \cdot \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$

B4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος B2 με την

ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$ (2°/Ιουλ 2010)

111. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι
κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z
που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$.

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό
τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, β, γ
 $\in \mathbb{R}$ και $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$ τότε να αποδείξετε ότι: $\beta = -4$ και $\gamma = 5$.

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον
γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος B1. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί

³ Εκτός ύλης

τη σχέση: $v^3 + a_2 v^2 + a_1 v + a_0 = 0$ τότε να αποδείξετε ότι $|v| < 4$.

(B/2013)

112. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w - 4 - 3i| x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R} \text{ έχει μια διπλή ρίζα, την } x = 1.$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$

B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι: $|z - w| \leq 10$ και $|z + w| \leq 10$.

B4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος B1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει: $|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5$

(2^ο 2013 επ)

113. Δίνεται η εξίσωση $2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$.

B1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

B2. Αν $z_1 = 1+i$ και $z_2 = 1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε

να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$ είναι ίσος με $-3i$.

B3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει $|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$, όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

(B/2014)

114. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

• $w = \frac{2z - 1}{2z + i}, \quad z \neq -\frac{i}{2}$

• w φανταστικός.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα

$\varrho = \frac{1}{2}$, εκτός από το σημείο $M(0, -\frac{1}{2})$ του κύκλου.

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $|w| = 1$

B3. Αν είναι $z = \frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι $w^4 + iw^7 = 0$ (B/2014 επ)

115. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-4| = 2|z-1|$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\varrho=2$.

B2. Έστω $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος

B1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

β) $-4 \leq w \leq 4$.

B3. Αν $w = -4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 με $z_3 = 2iz_1$ είναι ισοσκελές. (2° /2015)

116. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν :

- $|z-3i|^2 - 18 = |z-3|^2$

- $|w-i| = \text{Im}(w) + 1$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση $x-y-3=0$

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$.

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z και w να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$. (B/2015 Ιουλ.)

Συναρτήσεις Όρια συνέχεια

117. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}, x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

α. Να αποδείξετε ότι f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

β. Να αποδείξετε ότι $f = f^{-1}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \neq 3$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1} \right)$ (2° 2020 π)

118. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty)$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

B2. Αν $h(x) = (x-1)^2, x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h .

B3. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0, 1]$.

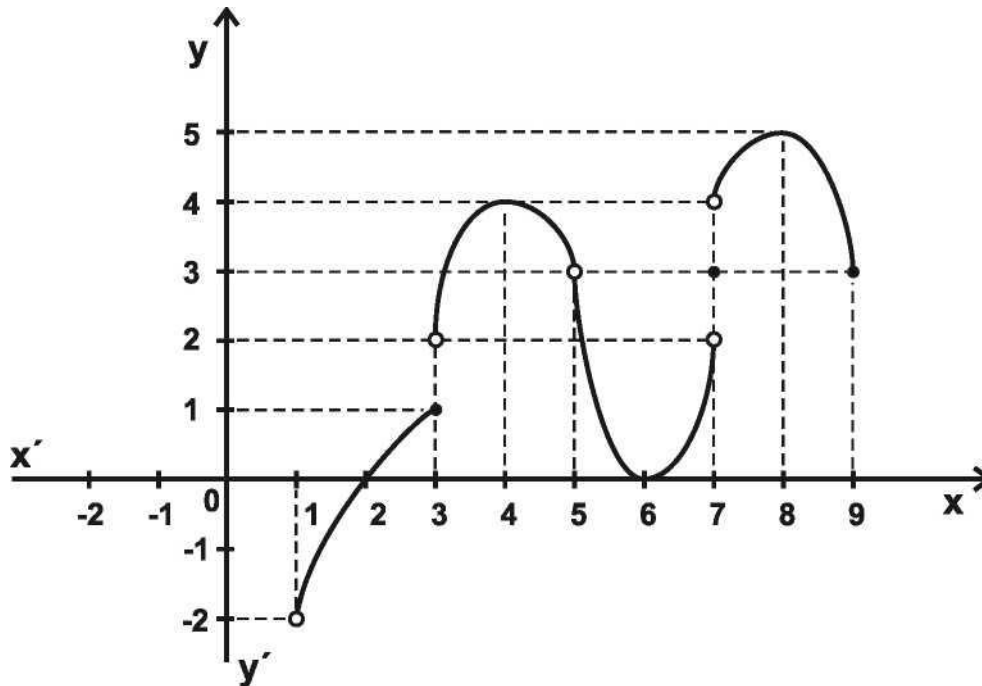
$$\text{Θεωρούμε την συνάρτηση : } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}.$$

i. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 1]$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(x) = \eta \mu \alpha, \text{ όπου } \alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right). \quad (2^\circ \text{ 2022})$$

119. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

γ. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

δ. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

ε. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$

β. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(B/2016 Ιουλ.)

120. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$g(x) = \ln x$.

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα

(e, e^2) .

γ. Να προσδιορίσετε την $\varphi = g \circ f$.

δ. Αν $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$, να εξετάσετε αν $\varphi = h$. (2022 2ο επαν)

121. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , \quad 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1) e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

A. Να βρεθούν τα, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.

B. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Γ. Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος B να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3^ο /TEX2000)

Παράγωγος

122. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 2$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. (3ΕΣΠ/2002)

123. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0 .

Στήλη A

συναρτήσεις

α. $f(x) = 3x^3$, $x_0 = 1$

β. $f(x) = \eta\mu 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

γ. $f(x) = 3^{|x|}$, $x_0 = 0$

δ. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

Στήλη B

εφαπτόμενες

1. $y = -2x + \pi$

2. $y = \frac{1}{4}x + 1$

3. $y = 9x - 6$

4. $y = -9x + 5$

5. δεν υπάρχει

(1B2/2000)

124. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3, x \in \mathbf{R}$.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, f(3))$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

(2^ο εσπ/2002)

125. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = (x+\alpha)^2 - 1 \text{ και } x \in [-1, +\infty), \alpha \in \mathbf{R} \text{ και } g(x) = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}.$$

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι ίση με 2, τότε:

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της, f^{-1} .

Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1, x \in \mathbf{R}$ τότε:

B3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

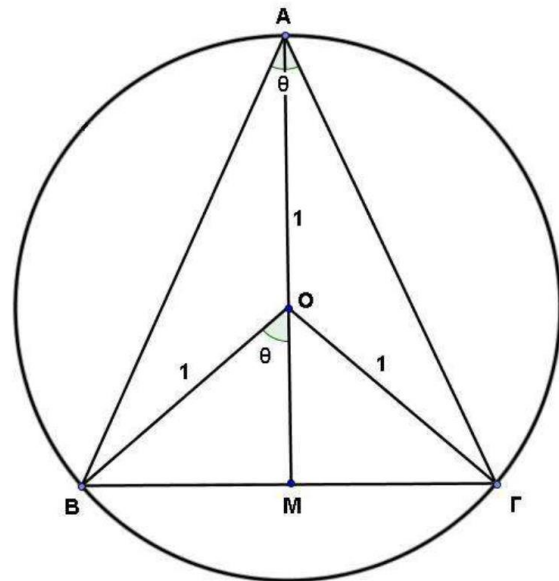
B4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1} \circ g)(x)}$, όπου $(f^{-1} \circ g)(x) = |x| - 1, x \in \mathbf{R}$. (2^ο/2020 επ. π.)

126. Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και

$\angle BOM = \theta$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση της γωνίας είναι: $E(\theta) = (1 + \sin\theta)\eta\mu\theta$ με $\theta \in (0, \pi)$.

β. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.



γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2 , με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

δ. Για τις γωνίες θ_1, θ_2 , του ερωτήματος γ, να αποδείξετε ότι υπάρχουν

$$\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi) \text{ τέτοια ώστε : } \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2). \quad (3^\circ/2020\pi)$$

- 127.** Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου

$$t \geq 0. \text{ Αν ο ρυθμός μεταβολής της } f(t) \text{ είναι } \frac{8}{t+1} - 2$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί.

(Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$).

(4° TEX/ 2000)

- 128.** Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}.$$

α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

δ. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

(4° /2001 Σεπ)

- 129.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η γραφική παράστασή της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι

$$\text{παραγωγίσιμη στο } (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \text{ με } f'(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}.$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $(x_0, f(x_0))$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 .

γ. Έστω $y = -2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ϵ) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ϵ). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου MKG , όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και G είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3, 4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική t_0 .

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$. **(3ο 2022)**

- 130.** Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

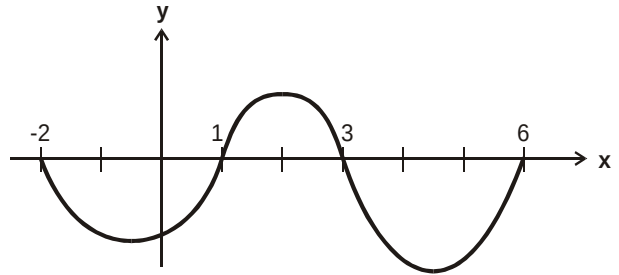
$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8)$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 . **(2018 Γ)**

131. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2,6]$.

Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.



(1B2/Σεπ2001

132. Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα. Τα καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $\left(5,5 + \frac{x^2}{200} \right)$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι 2000 δραχμές την ώρα

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι:

$$K(x) = \frac{1800000}{x} + 500x, \quad 0 < x \leq 90.$$

β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

(4^ο εσπ/2002)

133. Τη χρονική στιγμή $t=0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0 \text{ όπου } \alpha \text{ και } \beta \text{ είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο}$$

χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα

που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

(4° /2000)

134. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

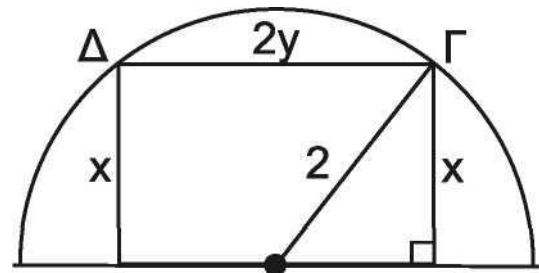
β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α .

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

(3° /2008)

135. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο K και διάμετρο $MN = 4\text{cm}$. Ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $x\text{ cm}$ και $2y\text{ cm}$ είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του

ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ως συνάρτηση του x , είναι $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$, $x \in (0, 2)$.

Γ2. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (E(x) - 2\sqrt{3})e^x$, $x \in (0, 2)$, έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα .

(3° /2020 επ. π.)

136. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(2° /2004)

137. Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \beta, \gamma \text{ πραγματικοί αριθμοί με } \beta^2 < 3\gamma.$$

- α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα
β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

(3^ο /2001)

138. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει

$f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

- α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) .
β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

(4^ο /2003)

139. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2)$, $x > -1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$

A. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να

είναι πραγματικός αριθμός.

B. Έστω ότι $\lambda = -1$

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$.

(3^ο/Ιούλ 2009)

140. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2, x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία λύση.

Γ4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$ (Γ/2012 επ)

141. Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ3. Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση:

$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$ όταν $x \in [0, +\infty)$. (2016 Γ)

142. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

B1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (2016 B)

143. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (2018 B)

144. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της.

B4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (Θέμα B/2019)

145. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:

B1. Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .

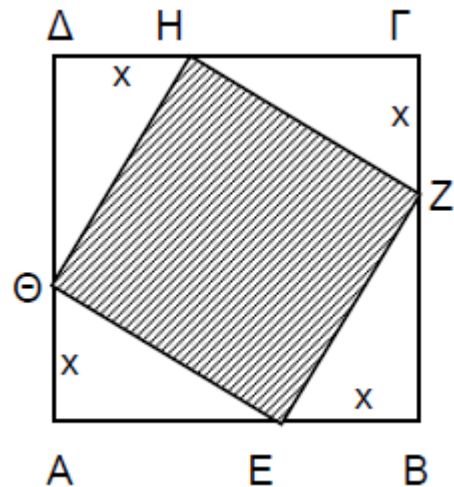
B2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

B3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

B4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x)$ του

αντίστοιχου τετραγώνου $EZH\Theta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$. (B/2017 επ)



146. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

- Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta \mu x}{x} = 0$

- $f'(x)f''(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$

α. i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, 0)$.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$

γ. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής.

δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1» και να βρείτε το π.ο. της f^{-1} . (2022 3^ο επ)

Ολοκλήρωμα

147. Να βρείτε τη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f''(x) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(0, 3)$ έχει κλίση 2.

(1B1/ΙΟΥΛ 2001)

148. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_0^1 (e^x + x) dx$

β) $\int_3^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta \mu x + 3\sigma \upsilon \nu x) dx$

(1B2/ΙΟΥΛ 2001)

Συνδυαστικά

149. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f:(1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και } g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, με $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι

«1-1» και να βρείτε την αντίστροφη της.

B3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε την συνάρτηση φ

ως προς τη μονοτονία.

B4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος B3, να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x). \quad (2^\circ / 2020)$$

150. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ με $\lambda > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}. \text{ Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της } f \text{ στο } M \text{ τέμνει}$$

τον άξονα $x'x$ στο σημείο B .

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 . **(3°/2020 NEO)**

151. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την

οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5.$

α. Να βρείτε το $f(0)$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

γ. Αν $h(x) = e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.
(3° /Σεπ 2000)

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x, x > 0$

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο

διάστημα $(0, e)$.

(3° /ΙΟΥΛ 2008)

153. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.
(3° /2002)

154. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leq 1 \\ \left(1 - e^{-x} + 1\right) \ln(x - 1), & x \in (1, 2] \end{cases}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x} + 1}{x - 1}$

β. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

γ. Για $\alpha = -1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη

προς τον άξονα $x'x$.

(3^ο /ΙΟΥΛ 2001)

155. Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $\operatorname{Re}(z) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ και $|\operatorname{Re}(z)| > |\operatorname{Im}(z)|$.

Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

(3^ο /ΙΟΥΛ 2004)

156. Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με τύπο $f(z) = \frac{|x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2}$ όπου z

συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f , εάν $|z+1| > |z-1|$.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

(3^ο /ΙΟΥΛ 2002)

157. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία

$A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η

εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $(\epsilon): \psi = -\frac{1}{668}x + 2005$

(3^ο /ΙΟΥΛ 2005)

158. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της

γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$,

σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

(4^ο /ΙΟΥΛ 2003)

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $a > 0$ και $a \neq 1$

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a = e$

B. Για $a = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$

και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0 \quad \text{έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (1, 2) \quad (3\text{o}/2009)$$

160. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:

α η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

β. υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4}$

γ. υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$. (3^ο /2000)

161. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο

$A(a, \ln a)$ με $a > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

(4ο/2006)

162. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ με $x > 0$.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1}$.

(4ο/ΙΟΥΛ 2006)

163. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 1$ και $g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x-1}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το

$A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ και τύπο $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

B2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γρ. παρ. της $g \circ f$ στο $+\infty$.

B3. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 2$ της συνάρτησης

$h: A \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \frac{(g \circ f)(x)}{x-2}$

B4. Έστω η συνάρτηση

$$\varphi(x) = \begin{cases} (g \circ f)(x), & x \in A \\ 1 - x^2, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x) = \varphi(x) \cdot \eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0, 2]$.

(B/2019επ)

164. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = f'(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία

λύση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

(3^ο/2011)

165. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + a, & x \leq 1 \end{cases}$

B1. Να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $a = 1$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 4]$.

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

(B 2018επ)

166. Δίνονται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x-1)\ln(x^2-2x+2) + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\epsilon): y = -x + 2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ϵ) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{3}{2}$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2, x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της. **(Θέμα Δ/2019)**

167. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)f'(x) = \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f

διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$. Έστω το σημείο $A(\frac{3}{2}, 0)$.

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$.

B. Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο M και τον άξονα $x'x$

Δ. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(0, 1)$. **(Γ/2019επ)**

168. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x), x \geq 1$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\overset{\Delta}{MOK}$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$. **(Θέμα Γ/2019)**

169. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f , αν υπάρχουν.
- δ. Να βρείτε:
- Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
 - Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (2° /2021)

170. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\alpha < -3$.

- α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
- β.
- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \frac{3\pi}{2}]$.
 - Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in (0, \frac{3\pi}{2})$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$
- γ. Να δείξετε ότι στη C_f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτόμενη της είναι παράλληλη στον άξονα x' .
- δ. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$. (3° /2021)

171. α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x}$, x_0 , η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x_0(x+1) - \ln x - 1$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης του **α.β ερωτήματος**.

β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , το $f(x_0) = 0$.

γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφ. παραστάσεις των $g(x) = x \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και

$h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή

εφαπτομένη.

δ Έστω συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$.

Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A , και B είναι ελάχιστη όταν $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

(4°/2021)

172. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x} & \text{αν } x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sin x & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$.

β. Αν $f'(\frac{\pi}{2}) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$,

να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$.

γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x) dx$

(2° /ΙΟΥΛ 2007)

173. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)} dx$.

γ. Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι: $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$. (2°/ΙΟΥΛ 2006)

174. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = 2\eta\mu x - x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^\pi f(x) \sin x dx$

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f(2x) \ln x]$ (Γ 2018 επ)

175. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \mu \frac{1}{x - x_0} \right]$ όπου x_0 το

σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Δ3. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ϱ .

Δ4. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ϱ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\varrho)[f'(\varrho) + 1]$, για κάθε $\varrho \in (x_0, 1)$. (4° /2020)

176. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν την ισότητα

$(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x=2$.

β. Αν η εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x=2$ τέμνει τον άξονα $\psi\psi$ στο $\psi_0 = -3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ).

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , της εφαπτομένης (ϵ), του άξονα $x'x$ και της ευθείας

$x = \frac{3}{5}$. (3°/ΙΟΥΛ 2006)

177. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$,

όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

(2ο/ΙΟΥΛ. 2004)

178. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e \ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) > e$ για κάθε $x > 0$.

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(3^ο / ΙΟΥΛ 2007)

179. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

(3^ο /2003)

180. Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a = -\frac{1}{9}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

(2^ο /2001)

181. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

(3^ο /ΙΟΥΛ 2003)

182. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$,

$k \in \mathbb{Z}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$,

$B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

(3/2007)

183. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$.

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(3/Ιουλ. 2010)

- 184.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -x^2 - x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda(x + 1)$, $\lambda \in (0, 1)$. E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα xx' και την ευθεία (ε) .
 E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα yy' και την ευθεία (ε) .
 α. Να εκφράσετε τα εμβαδά E_1 και E_2 συναρτήσει του λ .
 β. Να δείξετε ότι η διαφορά των δύο εμβαδών δίνεται από τη σχέση
- $$E(\lambda) = E_1 - E_2 = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{3}$$
- γ. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η διαφορά των δύο εμβαδών, $E(\lambda)$ έχει ακρότατη τιμή και να τη χαρακτηρίσετε. (Παγκύπριες εξετάσεις 2009)
- 185.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\ln x - 1$, $x > 0$
 Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f
 Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.
 Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$
 Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$
- (Γ/2012)
- 186.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.
 α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda ex$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .
 γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$,

είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$

δ. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$. (3^ο/2005)

187. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

(2^ο/2006)

188. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x+1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (4^ο /ΙΟΥΛ2004)

189. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f(3) = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

β. Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(a) = \int_a^0 g(x)dx$, $a \in \mathbb{R}$

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} I(a)$ (3^ο /2004)

190. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να

αποδείξετε ότι $g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος

(β) ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και

$$g(0) = g'(0) = 1$$

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

(4° /2008)

191. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$

ii. $f'(0) = 1$.

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και

$f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i. $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

ii. $\int_0^1 f(x) dx < f(1)$

(4° /ΙΟΥΛ 2005)

192. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία

$$\text{ισχύει: } f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2} dt$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $x > 0$

- γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

(4/ΙΟΥΛ 2001)

193. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x) \ln 2x)$.

(4/2001)

194. α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

ι) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.

iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση

της f , τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι: $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.

(4/2002)

195. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$

(2/ΙΟΥΛ 2002)

196. Έστω η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f(0) = 2f'(0) = 1.$$

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .

β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα

$[0, 1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1 + f^2(t)} dt = 1$ έχει μία μοναδική λύση στο

διάστημα $[0, 1]$.

(4/ΙΟΥΛ 2002)

197. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$f'(x) = e^{x - f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln \left(\frac{1 + e^x}{2} \right)$

β. Να βρεθεί το: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta \mu \chi}$

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις: $h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt$ και $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$.

(4^ο/2005)

198. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ισχύει } g(x) = \int_1^{x^3} |z|f(t)dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0$$

όπου $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g' .

β. Να αποδείξετε ότι $\left| z + \frac{1}{z} \right| = |z|$

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$$

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$

τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

(4/2004)

199. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x)>0$ και $g(x)>0$

$$\text{ii) } \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

$$\text{iii) } \frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

Α1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$

Α3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

Α4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $F(x) = \int_1^x f(t^2)dt$ τους άξονες x' και y' και την

ευθεία με εξίσωση $x=1$.

(4°/2011)

- 200.** Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad x \in [0, 1].$$

α. Ναδειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

δ. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5}.$ (4/2007)

- 201.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi\psi$.

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 x f(x) dx$ (3° /2010)

- 202.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\text{με παράγωγο } f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$,
 $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9}, x \in \mathbb{R}$$

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(4ο/2010)

203. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, x \in [0, +\infty) \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt}, x \in (0, +\infty)$$

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t) + F(t)]dt = F(1)$

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

γ. Αν $h(1)=2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt < 2 \int_0^2 tf(t)dt$

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt = \frac{1}{2} F(1)$ (4/ΙΟΥΛ 2008)

204. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0,2] \\ 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα

$(0, 2)$ και ότι ισχύει $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, 0 < x < 2$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να

ισχύει $\alpha \int_0^\xi t f(t) dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t) dt$ (4^ο/2009)

205. Δίνεται μια συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}, 0 \leq x \leq 2$$

$$f'(0) = 2f(0), \quad f'(2) = 2f(2) + 12e^4, \quad f(1) = e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

γ. Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 e^{2x} \quad 0 \leq x \leq 2$

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$ (4^ο/Ιούλ 2009)

206. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^1 f(xt) dt + x^3}{\eta \mu^3 x} = +\infty$

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x) + 2x = 2x(f(x) + x^2)$ τότε:

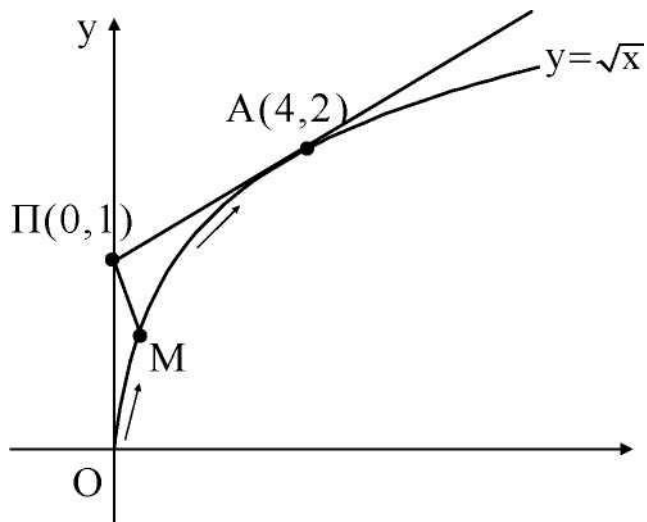
Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2, x \in \mathbb{R}$

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt, x \geq 0$$

και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt < 0$ (4/Ιουλ 2010)

207. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}, x \geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή $t, t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή $t, t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t) = 16t$

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4, 2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠM του παρατηρητή από το σημείο O μέχρι το σημείο A .

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0,1)$, κατά την οποία η απόσταση $d = (\Pi M)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Να θεωρήσετε ότι το κινητό M και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy . (4/ΙΟΥΛ 2011)

208. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right)|f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt, \quad x > 0$$

όπου $\alpha > 0$, είναι κυρτή.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi). \quad (\Delta/2012)$$

209. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$, με $A=(0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(A) = (-\infty, 0]$
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, και
- $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} f'(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2$, για κάθε $x > 0$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$, $x > 0$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0, f(x_0))$ το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M(\xi, F(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: F(\beta)x - (\beta - 1)y + 2012(\beta - 1) = 0$

Δ3. Αν $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)]x^5}{x - 1} + \frac{(\beta - 1)(x + 1)^3}{x - 3} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x , στο διάστημα $(1, 3)$

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t f(t) dt$, για κάθε $x > 0$

(Δ/2012 επ)

210. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \exp x_0. \quad (\Gamma/2013)$$

211. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 5h) - f(1 - h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$, $x \in (1, +\infty)$ και $\alpha > 1$.

Να αποδείξετε ότι :

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε

$$\text{την ανίσωση στο } \mathbb{R} \quad \int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{x^4+6} g(u)du$$

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha), \quad x > 1 \text{ έχει ακριβώς μια λύση.}$$

(Δ/2013)

212. Δίνεται συνάρτηση $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ για κάθε $x > 0$,
- $f(x)f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$.

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις: $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ με $x > 0$ και $h(x) = (f'(x))^3$ με $x \geq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)f''(x)+1 = (f'(x))^2$ για κάθε $x > 0$.

Δ2. α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0, +\infty)$

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

α. $g(x) \geq 2-x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β. $\int_0^1 (2-x)f(x)dx < 1$

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$

(4° 2013 επ)

213. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$.

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτη της στο $-\infty$.

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

(Γ/2014)

214. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & , \text{ αν } x > 0 \\ 0 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

Γ1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Γ3. i) Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση, $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) \int_2^\xi f(t) dt = f(\xi)(\sqrt{2} - f(\xi)) \quad (\Gamma/2014 \text{ επ})$$

215. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & , \text{ αν } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^{2f'(x)} f(u) du = 0$ έχει ακριβώς μία λύση,

η οποία είναι η $x=0$.

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με x_0 και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x \geq x_0$ με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M

είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2$, $x \in (0, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου. (Δ/2014)

216. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε $e^{f(x)} (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3, δίνεται ότι

$$f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x = 1$.

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτόμενων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A , B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόσταση τους.

(Δ/ 2014 επ)

217. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f[e^{3-x}(x^2 + 1)] = \frac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των

πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(x)$ για κάθε $x > 0$.

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_{2x}^{4x} f(t)dt, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(3^ο /2015)

218. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- $f(1) = \frac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2+1)^3-8) \leq f(8(x^2+1)^2)$$

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt = -\xi(3\xi^2-1)f(\xi^3-\xi).$$

(Γ/2013 επ)

219. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

- $f(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} \right) \ln |f(x)| \right]$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0 \text{ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο } (2,3).$$

(4^ο/2015)

220. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g όπου

$$g(x) = \int_1^{h(x)} \sqrt{t^2 - 1} dt, \text{ όπου } h(x) = f(x^2 + 1) - f(2) + 1.$$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$ έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες

$$x_1, x_2.$$

Γ4. Αν για τις ρίζες του ερωτήματος Γ3 ισχύει ότι $x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M(0, \frac{3}{2})$

(3^ο /2015 Ιουλ)

221. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^2 - x) f'(x) + x f(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\int_1^x f(t) dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{f(t)}{t} dt$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Δ3. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = -\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$ είναι κοίλη.

β. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$. Να αποδείξετε ότι $E < 2$. (Δ/2015 Ιουλ.)

222. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \eta \mu x dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ και $f'(0) = 1$

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)}$

Δ4. Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$. (2016 Δ)

223. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\eta \mu x) > f(x - \frac{1}{6}x^3)$

Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Γ4. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

(Γ/2016 Ιουλ)

224. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

ii. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της

εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι

$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$, για κάθε $x > 1$.

(Δ/2016 Ιουλ)

225. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h

αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

B3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη

μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

(B/2017)

226. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και το σημείο $A \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της

γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A , τις οποίες και να βρείτε.

Γ2. Αν $(\varepsilon_1): y = -x$ και $(\varepsilon_2): y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1) , (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε

ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) , (ε_2) , και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$. (Γ/2017)

227. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

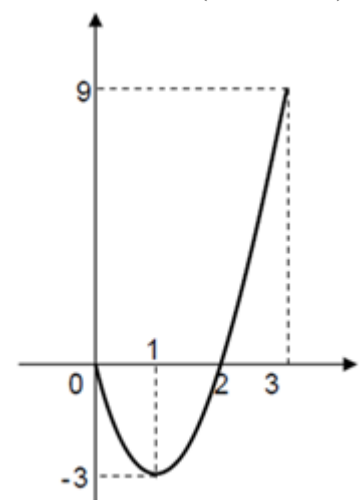
Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τη γραφική παράσταση της g , με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \pi$.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.

(Δ/2017)

228. Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο διπλανό σχήμα:



- $f(0) = 2, f(1) = 0$

- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ ισούται με 8 τ.μ

- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2, f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{f(x) - 2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$ για το οποίο δεν έχει όριο στο x_0 η $\frac{1}{f(x)}$.

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f (Γ/2017 επ)

229. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του α $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Δ4 Να αποδείξετε ότι $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < -\frac{3\pi}{2} - 1$

Δ5 Μα αποδείξετε ότι $f(-\frac{\pi x}{2}) = f(-\frac{\pi}{2} e^{-x})$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.

(Δ/2017επ)

230. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x_1 < x_2$ η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2) .

Δ4. Αν $\alpha = 2$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx > -\frac{32}{15} \quad (2018 \Delta)$$

231. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0, 1)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x > 0$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(a)}{x-1} + \frac{f^{-1}(a)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi a)}{x} = 0$, όπου $0 < a < 1$,

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με

$F(e) = e \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln \left(\frac{2^{e+1}}{e+1} \right)$ (Δ/2018 επ)

232. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$ ισούται με $\frac{1}{2}$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)dx < 1$.

Δ. Να λύσετε στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ την εξίσωση

$$f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\epsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}). \quad (\Delta/2019\epsilon\pi)$$

233. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = x \ln x - \ln(\lambda x), \quad x \in (0, +\infty), \text{ όπου } \lambda > 0 \text{ και } g(x) = x^x, \quad x \in (0, +\infty).$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f , καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $x^x \geq \lambda x$, για κάθε $x > 0$.

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

$$\delta. \text{ Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση } h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι i. η h είναι συνεχής

$$\text{ii. η εξίσωση } x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt = 0 \text{ έχει}$$

μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$. (4° /2020π)

234. Έστω $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ να ισχύει: } xf(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1$$

$$\Delta 1. \text{ Να αποδείξετε ότι } f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Δ2 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2020 - \sin x - x = 2020$, έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Δ5. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $F(0)=0$,

όπου 0 η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (**Δ4**).

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει: $x |F(x)| \leq 2|x|$. **(4^ο /2020 επ.)**

235. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & x > 0 \end{cases}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

β. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ. Να δείξετε ότι $\forall \alpha, \beta \in [-1, \frac{2}{e}]$ υπάρχει $\xi \in [-1, \frac{2}{e}]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$.

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. **(2002επ 4ο)**

236. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0, +\infty)$ με τύπο $f(x)=x-\ln(3x)$.

α. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Στα παρακάτω ερωτήματα x_1 , και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα α.

β. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε

ότι $E = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(2 - x_1) < 0$.

δ. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

(4° 2022)