

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____ Ομάδα Α

Θέμα 1^ο

Α. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη **Σωστή** ή **Λάθος** συμπληρώνοντας τον πίνακα

1. Η εξίσωση $(|x| + 1)(|x| + 2) = 0$ είναι αδύνατη.
2. Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.
3. Η εξίσωση $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$, με $a \neq 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
4. Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.
5. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = 2$ και γινόμενο $P = -2$.

Μονάδες 4X5

1	2	3	4	5
Σωστό	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Σωστό

Θέμα 2^ο

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-2}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{13}{6}$

Μονάδες 30

Απάντηση

1^{ος} τρόπος

Η εξίσωση για κάθε $x \neq 0$ και 2 είναι ισοδύναμη με την

$$6(x-2)^2 + 6x^2 = 13x(x-2) \Leftrightarrow 6x^2 - 24x + 24 + 6x^2 = 13x^2 - 26x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-6)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ ή } x = -4$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρώντας $\frac{x-2}{x} = y \neq 0$ για $x \neq 0, 2$ η εξίσωση γίνεται $y + \frac{1}{y} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow 6y^2 + 6 = 13y \Leftrightarrow$

$$6y^2 - 13y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2} \text{ ή } y_2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Έτσι } \frac{x-2}{x} = \frac{3}{2} \text{ ή } \frac{x-2}{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -4 \text{ ή } x = 6$$

Θέμα 3^ο

α. Να λύσετε την εξίσωση : $125x^3 - 5x = 0$

Μονάδες 9

β. Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^2 + 4|x-1| - 5 = 0$

Μονάδες 9

γ. Αν x_1 και x_2 είναι οι θετικές ρίζες των εξισώσεων στο α. ερωτ και β ερωτ.

αντίστοιχα να σχηματίζετε την εξίσωση που έχει ρίζες τους $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

Μονάδες 7

Απάντηση

α. $125x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow 5x(25x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x = \frac{1}{5} \text{ ή } x = -\frac{1}{5}.$

β. Θέτοντας $|x-1| = \omega \geq 0$ έχουμε την $\omega^2 + 4\omega - 5 = 0 \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega+5) = 0 \Leftrightarrow \omega=1 \text{ ή } \omega = -5 \text{ (απορρίπτεται).}$

Έτσι $|x-1| = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \text{ ή } x-1 = -1 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2$

γ. Είναι $x_1 = \frac{1}{5}$ και $x_2 = 2$ οπότε $S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ και $P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0.$

Θέμα 4^ο

Αν τα $\frac{3}{7}$ ενός κεφαλαίου τα τοκίσουμε προς 5% και το υπόλοιπο προς 4,5% παίρνουμε σε ένα χρόνο από το β' μέρος 1530 € τόκο περισσότερο από το τόκο του πρώτου. Ποιο είναι το αρχικό κεφάλαιο;
Μονάδες 25

Απάντηση

Έστω $x > 0$ σε χιλιάδες € το κεφάλαιο.

Τότε σε ένα χρόνο τα $\frac{3}{7}$ του κεφαλαίου δίνουν τόκο $\frac{3}{7} \cdot x \cdot \frac{5}{100} = \frac{15}{700}x = \frac{3}{140}x$ σε χιλιάδες ευρώ.

Τα υπόλοιπα $\frac{4}{7}$ του κεφαλαίου ομοίως δίνουν $\frac{4}{7} \cdot x \cdot \frac{4,5}{100} = \frac{18}{700}x = \frac{9}{140}x$.

Επομένως ισχύει η σχέση: $\frac{3}{140}x + 1,53 = \frac{9}{140}x$, αφού «μετράμε με χιλιάδες».

Οπότε επιλύοντας έχουμε $3x + 140 \cdot 1,53 = 9x \Leftrightarrow 6x = 140 \cdot 1,53 \Leftrightarrow x = \frac{140 \cdot 1,53}{6} = 35,7$ χιλιάδες €.

Αρα το κεφάλαιο ήταν 37500 €.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Ομάδα Β

Θέμα 1^ο

Α. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη **Σωστή** ή **Λάθος** συμπληρώνοντας τον πίνακα

1. Η εξίσωση $(|x| - 1)(|x| + 2) = 0$ έχει 2 μόνο πραγματικές ρίζες.
2. Η εξίσωση $2x^2 + 3ax + a^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.
3. Η εξίσωση $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$, με $a \neq 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
4. Οι εξισώσεις $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 0$ και $(2x^2 + 3x + 1) = 5(x^2 - 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις.
5. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = 3$ και γινόμενο $P = -1$.

1	2	3	4	5
Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό

Μονάδες 4X5

Θέμα 2^ο

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{13}{6}$

Μονάδες 30

Απάντηση

1^{ος} τρόπος

Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0, -1$ και είναι ισοδύναμη με την

$$6(x+1)^2 + 6x^2 = 13x(x+1) \Leftrightarrow 6x^2 + 12x + 6 + 6x^2 = 13x^2 + 13x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 2$$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Θέτοντας } y = \frac{x+1}{x} \neq 0 \text{ για κάθε } x \neq 0, -1 \text{ έχουμε } y + \frac{1}{y} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow 6y^2 + 6 = 13y \Leftrightarrow$$

$$6y^2 - 13y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2} \text{ ή } y_2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Οπότε } \frac{x+1}{x} = \frac{2}{3} \text{ ή } \frac{x+1}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 2.$$

Θέμα 3^ο

α. Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 - 16x = 0$

Μονάδες 9

β. Να λύσετε την εξίσωση $(x-3)^2 - |x-3| - 2 = 0$

Μονάδες 9

γ. Αν x_1 και x_2 είναι οι θετικές ρίζες των εξισώσεων στο α. ερωτ και β ερώτ.

αντίστοιχα να σχηματίζετε την εξίσωση που έχει ρίζες τους $\frac{x_2}{x_1}$ και $\frac{x_1}{x_2}$

Μονάδες 7

Απάντηση

α. Είναι $x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm 4$

β. Θέτοντας $|x-3| = y \geq 0$ παίρνουμε την εξίσωση $y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ή $y = -1$ (απορρίπτεται).

Έτσι $|x-3| = 2 \Leftrightarrow x-3 = 2$ ή $x-3 = -2 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = 1$.

γ. Είναι

1^η περίπτωση $x_1 = 4$ και $x_2 = 1$ τότε

$$S = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ και } P = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2} = 1 \text{ άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι } x^2 - \frac{5}{4}x + 1 = 0$$

και τελικά **$4x^2 - 5x + 4 = 0$** .

2^η περίπτωση

$$x_1 = 4 \text{ και } x_2 = 5 \text{ τότε } S = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{4} + \frac{4}{5} = \frac{41}{20} \text{ και } P = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2} = 1 \text{ άρα η εξίσωση είναι}$$

$$x^2 - \frac{41}{20}x + 1 = 0 \text{ και τελικά } \mathbf{20x^2 - 41x + 20 = 0.}$$

Θέμα 4^ο

Δύο πόλεις Α και Β απέχουν 190,8 Km. Από την πόλη Α αναχωρεί για την Β αμαξοστοιχία με μέση ταχύτητα 42,5 Km/h και την ίδια στιγμή ξεκινά από την Β αντίθετα, μια άλλη με μέση ταχύτητα 37 Km/h. Να βρείτε σε πόσες ώρες και σε ποια απόσταση από την πόλη Α θα συναντηθούν.

Μονάδες 25

Απάντηση

Έστω $t > 0$ ο χρόνος που απαιτείται για να συναντηθούν τα κινητά.

Τότε Η αμαξοστοιχία από το Α θα έχει διανύσει 42,5t Km και η αμαξοστοιχία από το Β 37t Km. Έτσι προκύπτει η σχέση $42,5t + 37t = 190,8 \Leftrightarrow 79,5t = 190,8$ άρα θα απαιτηθεί χρόνος

$$t = \frac{190,8}{79,5} = 2,4 \text{ h}$$